Номер 1. При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения $x^2 - ax + a + 1 = 0$ больше 1?

Ответ: $\left(-\infty;-1\right) \cup \left[2+2\sqrt{2};\infty\right)$

Решение:

Для того, чтобы уравнение имело корни, необходимо, чтобы выполнялось условие $D(a) = a^2 - 4a - 4 \geq 0$. Обозначим $S(a) = x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2}$ Выразим S(a) через коэффициенты квадратного уравнения по т.Виета.

$$S(a) = x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} = (x_1 + x_2) - 2x_1x_2 = a^2 - 2(a+1) = a^2 - 2a - 2 > 1$$

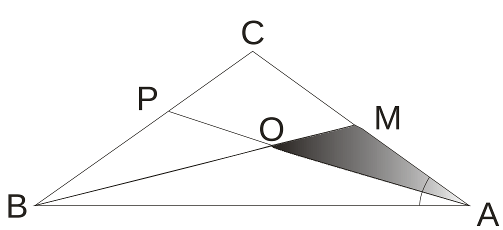
Таким образом условия задачи выполняются при всех значениях параметра a, удовлетворяющих следующей системе:

$$\begin{cases} a^2 - 2a - 3 > 0 \\ a^2 - 4a - 4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a-3)\cdot(a+1) > 0 \\ \left(a - 2 - 2\sqrt{2}\right)\cdot\left(a - 2 + 2\sqrt{2}\right) \geq 0 \end{cases}$$

Номер 2. В треугольнике ABC стороны $a = 13,\ \ b = 14,\ \ c = 15.$ BM - медиана, AP - биссектриса. AP и BM пересекаются в точке O. Найти площадь треугольника AOM .

Ответ: $\dfrac{147}{11}$

Решение:



BC=13; AC=14; AB=15;

Площадь ΔABC вычисляется по формуле Герона и равна 84. Так как BM–медиана, то площадь ΔABM в двое меньше площади ΔABC и равна 42.

Так как AO–биссектриса ΔBAM, то $\dfrac{BO}{MO} = \dfrac{AB}{AM} = \dfrac{15}{7}$.

Так как у ΔAOB и ΔMAO высоты, опущенные на BM равны, то

$$\frac{S_{\Delta ABO}}{S_{\Delta MAO}} = \frac{BO}{MO} = \frac{15}{7}$$

$$S_{\Delta AOM} = \frac{7}{22} S_{\Delta ABM} = \frac{7\cdot 42}{22} = \frac{147}{11}$$

Номер 3. Можно ли целые числа от 1 до 2004 расставить в таком порядке, чтобы сумма любых 10-ти подряд идущих чисел делилась на 10?

Ответ: невозможно.

Решение:

Предположим противное, и a_1, a_2, ... , a_{2004} – требуемая расстановка чисел 1,2,…,2004. Поскольку $a_1+ a_2+...+a_{10}$ и $a_2+ a_3+...+a_{11}$ делятся на 10, то их разность $(a_1+ a_2+...+a_{10})–(a_2+ a_3+...+a_{11})=a_1–a_{11}$ также делится на 10, т.е. числа a_1 и a_{11} оканчиваются на одну и ту же цифру.

Аналогично, любые два числа, стоящие через 10, оканчиваются на одну и ту же цифру. Итак, если число a_k оканчивается на цифру d, то все числа a_{k-10}, a_{k-20},... также оканчиваются на d. Значит, одно из чисел a_1, a_2,..., a_{10} оканчивается на d. Так как среди чисел *1,2,…, 2004* есть числа, оканчивающиеся на каждую из цифр *0,1,2,…,9*, то для каждой цифры среди чисел a_1, a_2,..., a_{10} есть хотя бы одно (а, значит, ровно одно) число, оканчивающееся на эту цифру. Но тогда последняя цифра числа $a_1+a_2+...+a_{10}$ совпадает с последней цифрой числа $0+1+2+…+9=45$, следовательно, $a_1+ a_2+...+a_{10}$ не делится на 10. Противоречие.

Номер 4. В ящике лежат 100 шариков белого, синего и красного цветов. Если, не заглядывая в ящик, вытащить 26 шариков, то среди них обязательно найдутся 10 шариков одинакового цвета. Какое наименьшее число шариков нужно вытащить, не заглядывая в ящик, чтобы среди них наверняка нашлись 30 шариков одинакового цвета?

Ответ: 66.

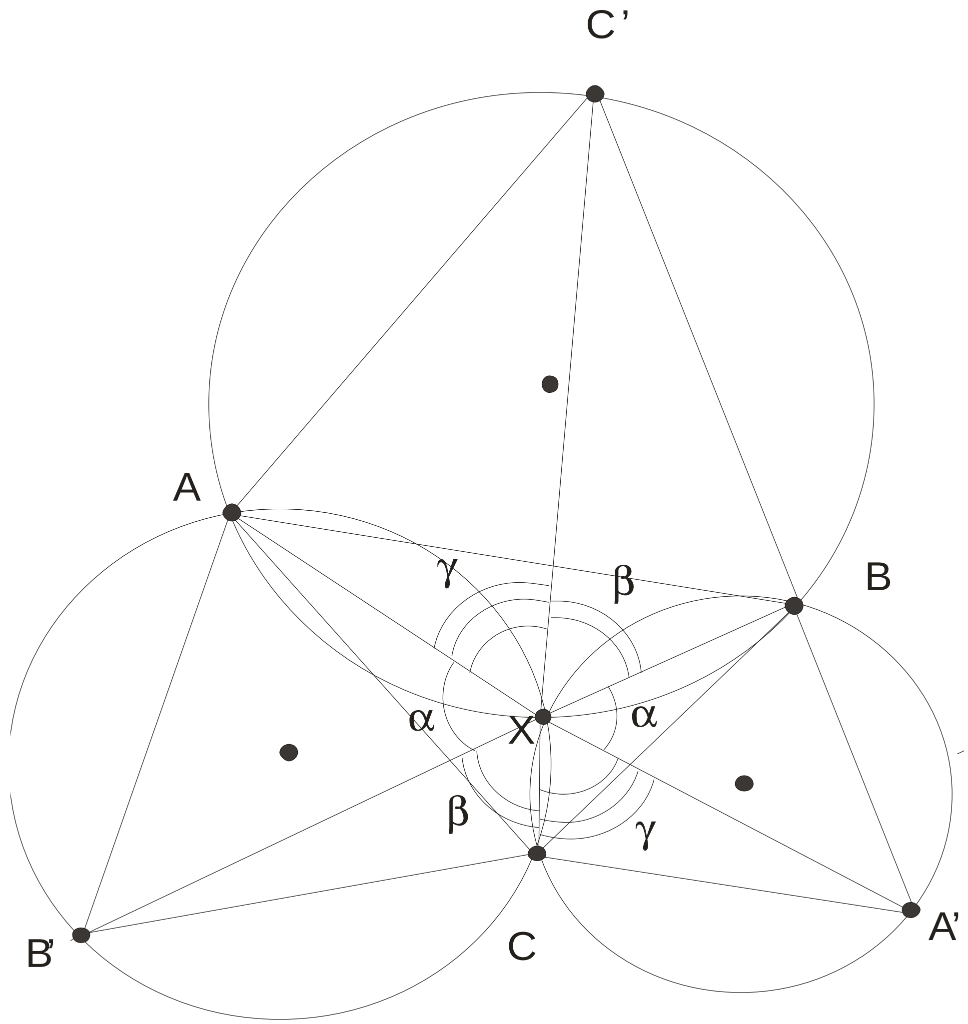
Решение:

Будем обозначать за Б, К, С количество белых, красных и синих шариков среди всех 100 шариков.

Покажем, что вытащить 65 шариков может быть недостаточно. В самом деле, если Б=7, К=46,С=47, то из любых 26 шариков не менее 26–7=19 красных и синих, следовательно, либо К≥10, либо С≥10. Однако, мы можем вытащить 65 шариков, среди которых 7 белых и по 29 красных и синих.

Покажем теперь, что вытащить 66 шариков всегда достаточно. Пусть это не так, и мы вытащили 66 шариков, среди которых не более 29 шариков каждого цвета. Тогда среди этих 66, и, тем более, среди всех 100 шариков не менее 66–29–29=8 каждого каждого цвета. Пусть для определенности С≥К≥Б≥8. Если при этом К≥9, то мы в противоречие условию смогли бы набрать 26 шариков, среди которых 8 белых, 9 красных и 9 синих. Иначе Б=8, К=8, и среди любых 66 шариков обязательно найдутся 66–8–8=50>30 синих шариков. Противоречие.

Номер 5. Три окружности проходят через точку X. A, B, C – точки их пересечения, отличные от X. A' - вторая точка пересечения прямой AX и окружности, описанной около треугольника BCX. Точки B' и C' определяются аналогично. Докажите, что треугольники ABC', $AB'C$ и $A'BC$ подобны.



Решение:

Пусть окружности пересекаются, как показано на рисунке.

Обозначим $\angle AXB'=\angle BXA'=\alpha$, $\angle BXC'=\angle CXB'=\beta$, $\angle CXA'=\angle AXC'=\gamma$.

Заметим, что $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

По свойству вписанных углов $\angle BAC'=\angle BXC'=\beta$, $\angle ABC'=\angle AXC'=\gamma$,

тогда $\angle AC'B=\pi-\angle C'AB-\angle C'BA=\pi-\beta-\gamma=\alpha$.

Итак, треугольник ABC' имеет углы α, β, γ.

Аналогично, треугольники $AB'C$ и $A'BC$ также имеют углы α, β, γ.

Замечание. В случае другого расположения окружностей, решение аналогично проводится с использованием равенства вписанных углов или с использованием свойств вписанного четырёхугольника (сумма противоположных углов равна π).

Номер 6. Назовём числа «приблизительно равными», если их разность не больше 1. Сколько существует различных способов представить число 2004 в виде суммы целых положительных «приблизительно равных» слагаемых? (Слагаемых может быть два или несколько. Способы разбиения, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются одинаковыми.)

Ответ: 2003.

Решение:

Пусть число *2004* разбито на *k* почти равных натуральных слагаемых, *kÎ{2,3,…2004}*. Пусть, среди них *s* слагаемых (*s>0*) равных *n*, тогда оставшиеся *r=k–s* слагаемых равны *n+1*.

Тогда *2004=s·n+r·(n+1)=(s+r)·n+r=k·n+r*. Поскольку *0£r<k*, то *r* и *n* определяются однозначно соответственно как остаток и неполное частное при делении *2004* на *k*.

Таким образом, для каждого *kÎ{2,3,…2004}* существует ровно один способ разбиения числа *2004* на почти равные слагаемые. Итого *2003* способа.