

1. Ответ: $\frac{1 \pm \sqrt{29}}{2}$

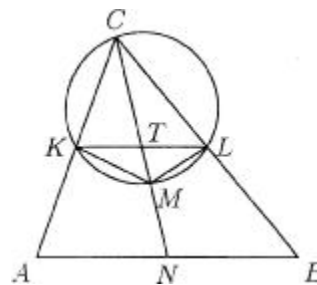
$$\begin{aligned}
 |x+1| \cdot |x-2| &= |x+3| \cdot |x-4| \iff |(x+1)(x-2)| = |(x+3)(x-4)| \iff \\
 \iff \begin{cases} (x+1)(x-2) = (x+3)(x-4) \\ (x+1)(x-2) = -(x+3)(x-4) \end{cases} &\iff \begin{cases} -x-2 = -x-12 \\ x^2-x-2 = -x^2+x+12 \end{cases} \iff \\
 \iff x^2-x-7=0 &\iff x = \frac{1 \pm \sqrt{29}}{2}
 \end{aligned}$$

Возможны и другие способы решения. Например, можно обе части данного уравнения возвести в квадрат, или раскрыть модули отдельно на каждом из пяти промежутков.

2. Ответ: $\frac{2m\sqrt{3}}{3}$

Пусть точки K и L - середины сторон AC и BC соответственно, M - точка пересечения медиан. KL - средняя линия треугольника, равная половине AB . Пусть T - точка пересечения KL и медианы CN . Тогда $KCLN$ - параллелограмм, следовательно, T - середина KL и середина CN . Из условия следует, что KL и CM - хорды одной окружности. По свойству пересекающихся хорд $KT \cdot LT = CT \cdot MT$. Так как $CT = m/2$, $MT = m/6$, $KT = LT = AB/4$, то

$$m/2 \cdot m/6 = AB^2/16, \text{ откуда } AB = \frac{2m\sqrt{3}}{3}$$



3. Ответ: 2.

$n^2 + 2n = (n^2 + 2n + 1) - 1 = (n + 1)^2 - 1$. Следовательно, $(n + 1)^2$ оканчивается цифрой 5. значит, само число $n + 1$ также оканчивается на 5. Докажем, что если натуральное число m оканчивается на 5, то его квадрат оканчивается на 25. Действительно, $m^2 = (10k + 5)^2 = 100k^2 + 100k + 25 = 100(k^2 + k) + 25$. Из доказанного следует, что $(n + 1)^2$ оканчивается на 25, значит, $n^2 + 2n$ оканчивается на 24.

4. Ответ: $\frac{m^2\sqrt{3} + m}{2}$

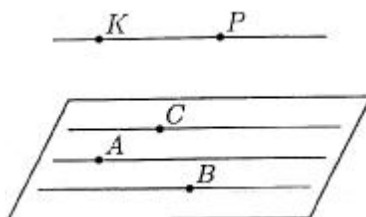
В равностороннем треугольнике длина высоты h выражается через длину стороны a по формуле $h = a\sqrt{3}/2$. Следовательно, сумма длин высот всех треугольников равна сумме длин их сторон, умноженной на $\sqrt{3}/2$. Сумма длин всех сторон - это длина отрезка OA_n . Пусть C - середина отрезка $A_n A_n$. Поскольку координата точки B_n равна m , то ее абсцисса равна m^2 , то есть, $OC = m^2$. Из треугольника $CB_n A_n$ получаем $CA_n = m\sqrt{3}/3$. Следовательно $OA_n = OC + CA_n = m^2 + m\sqrt{3}/3$. Тогда искомая сумма равна $(m^2 + m\sqrt{3}/3) \sqrt{3}/2 = (m^2\sqrt{3} + m)/2$

5. $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 4 - 2xy$. Заметим, что если сумма, неотрицательных чисел a и b равна 2, то их произведение не превосходит 1, так как $ab \leq (a + b)^2/4 = 1$. $x^2 y^2 (x^2 + y^2) = x^2 y^2 (4 - 2xy) = 2 \cdot (xy) \cdot (xy(2 - xy)) \leq 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$. так как $x + y = 2$ и $xy + (2 - xy) = 2$.

6. Предположим, что утверждение задачи не верно, то есть, любая плоскость содержит точки не более, чем трех цветов. Выберем по одной точке каждого цвета: A, B, C и P . Из нашего предположения следует, что никакие три из них не могут лежать на одной прямой (если бы какие-то три из них лежали на одной прямой, то существовала бы плоскость, проходящая через эту прямую и точку четвертого цвета).

Кроме того, прямая, проходящая через какие-либо две точки не может пересекать плоскость, проходящую через три оставшиеся (так как в этом случае их точка пересечения должна быть одновременно покрашена в два цвета), то есть эти прямая и плоскость параллельны.

Рассмотрим прямую KP и параллельную ей плоскость ABC . Проведем плоскости PKA, PKB и PKC , которые пересекают плоскость ABC по прямым, параллельным KP и проходящим через точки A, B и C (см. рис.).



Выберем из этих прямых ту, которая лежит между двумя другими. Пусть это прямая, содержащая точку A . Тогда прямая BC пересекает ее, а следовательно, и плоскость PKA , что противоречит ранее доказанному.

Отметим, что задача сводится к доказательству следующего утверждения: среди пяти точек общего положения в пространстве можно выбрать три точки так, чтобы плоскость, проходящая через них, пересекала прямую содержащую две оставшиеся точки.

7. Будем называть пустую клетку "дыркой". Заметим сначала, что если в (горизонтальном) ряду с дыркой есть хотя бы одна вертикальная доминошка, то одну из таких доминошек можно сделать горизонтальной. Действительно, для этого достаточно сдвинуть все горизонтальные доминошки, находящиеся между дыркой и вертикальной доминошкой после чего повернуть вертикальную доминошку. Будем повторять такую операцию, пока дырка не окажется в ряду без вертикальных доминошек (это обязательно случится, так как после каждой операции число вертикальных доминошек уменьшается). Во всех рядах, кроме первого, чётное количество клеток, поэтому, когда процесс остановится, дырка будет находиться в первом ряду.

Начнём строить "змею": передвинем дырку в верхний левый угол и сделаем вертикальной доминошкой, оказавшуюся под дыркой ("змея" занимает весь первый ряд). Затем повторим процесс, описанный в предыдущем абзаце, не затрагивая доминошек из первого ряда (включая одну вертикальную). После этого дырка окажется во второй строке, причём в ней будет только одна вертикальная доминошка. Передвинем теперь дырку в правый конец второго ряда, сделав оказавшуюся под ней доминошку вертикальной. "Змея" теперь занимает уже два первых ряда.

Повторяя данный процесс, в итоге получим "змею", составленную из всех доминошек. Теперь, если "змея" переползёт на одну клетку вперёд, то все доминошки станут горизонтальными (формально это - применение процедуры описанной в первом абзаце).