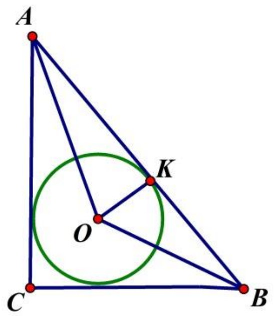
М1. Лыжные соревнования проходят на круговой лыжне. Первый лыжник проходит один круг на 2 минуты быстрее второго и через час опережает второго ровно на один круг. За сколько минут второй лыжник проходит один круг?

Решение: Примем длину трассы за 1. V_1 – скорость первого лыжника, V_2 – второго. Тогда $V_1 - V_2 = \frac{1}{60}$, или $\frac{1}{t} - \frac{1}{t+2} = \frac{1}{60}$. Решая уравнение, находим $t = 10$ – время, за которое проходит круг первый лыжник, а второй на 2 минуты дольше.
Ответ: *12* минут

М2. Решите уравнение $\frac{1}{x-4} + \frac{1}{x-5} + \frac{1}{x-6} + \frac{1}{x-7} = 0$

Решение: Сгруппировав первое слагаемое с последним и 2-е с 3-м, получим
$\frac{2x-11}{(x-7)(x-4)} + \frac{2x-11}{(x-5)(x-6)} = 0$.
Приведём дроби к общему знаменателю $(2x-11)(x^2 - 11x + 30 + x^2 - 11x + 28) = 0$.
Первый сомножитель обращается в 0 при $x = 5,5$.
Второй сомножитель $x^2 - 11x + 29 = 0$ имеет ещё 2 иррациональных корня
Ответ: $\left\{5,5; \frac{11 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$

М3. В прямоугольный треугольник ABC вписана окружность. Расстояния от её центра до острых углов треугольник равны $\sqrt{5}$ и $\sqrt{10}$. Чему равен радиус вписанной окружности?



Решение: Поскольку *AO* и *BO* – биссектрисы, то
$\angle AOB = 180^0 - \left(\frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2}\right) = 180^0 - 45^0 = 135^0$.
По теореме косинусов для ΔAOB: $AB^2 = 5 + 10 - 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{10} \cdot \cos 135^0 = 25$.
Таким образом, гипотенуза *AB = 5*. В ΔAOB радиус *OK* является высотой.
Найдём двумя способами площадь ΔAOB:
$S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot OK = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{10} \cdot \sin 135^0 = \frac{1}{2} \cdot 5$. ***Ответ:*** радиус *OK = 1.*

М4. На восьми карточках записаны числа 1, –2, –3, 5, –6, 7, –8, 9 – по одному на каждой карточке. Карточки переворачивают и перемешивают, а затем на чистой стороне пишут те же самые числа по одному на каждой карточке. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные 8 сумм перемножают.
а) Может ли в результате получиться 0?
б) Может ли в результате получиться 1?
в) Какое наименьшее натуральное число может в результате получиться?

Решение:
а) Среди восьми данных чисел нет противоположных. Значит, сумма чисел на каждой карточке не равна 0. Поэтому всё произведение не может равняться нулю.
б) Среди восьми данных чисел 5 нечётных. Значит на какой-то карточке попадётся два нечётных числа и их сумма чётная. Поэтому всё произведение чётно и не может равняться 1.
в) Среди восьми данных чисел 5 нечётных. Значит хотя бы на двух карточках с обеих сторон написаны нечётные числа и сумма чисел на на каждой из этих карточек чётная. Поэтому всё произведение делится на 4..Наименьшее натуральное число, делящееся на 4, это 4. Оно получится при следующем наборе пар чисел на карточках: (1; –2), (–2; 1), (5; –3), (–3; 5), (7; –6), (–6; 7), (9; –8), (–8; 9).
Ответ: а) нет; б) нет; в) 4

M5 *(ЕГЭ-С1)*. Решить уравнение $(\sin 2x - tgx)\sqrt{2-x-x^2} = 0$

Решение: Уравнение равносильно совокупности двух систем:

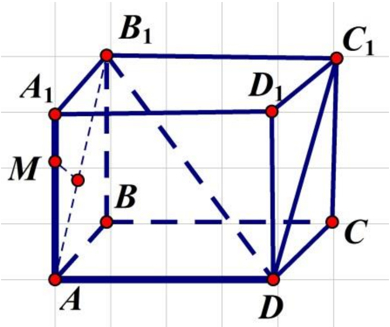
$$\begin{cases} -x^2 - x + 2 = 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \quad (1) \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2\sin x \cdot \cos x - \dfrac{\sin x}{\cos x} = 0 \\ -x^2 - x + 2 > 0 \end{cases} \quad (2)$$

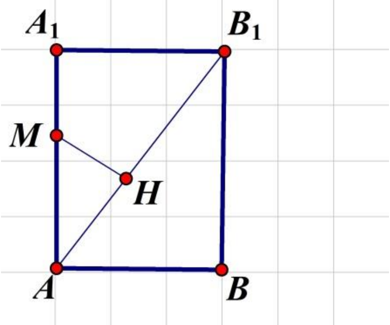
Решения системы (1): $x = -2, x = 1$. Решим систему (2).

$\begin{cases} \sin x(2\cos^2 x - 1) = 0 \\ -2 < x < 1 \end{cases}$. Уравнения $\sin x = 0$ и $\cos x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ на интервале $(-2;1)$ имеют решения $x = 0, x = \pm\dfrac{\pi}{4}$

Ответ: $\left\{-2, 0; \pm\dfrac{\pi}{4}; 1\right\}$

M6 *(ЕГЭ-С2)*. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AD = 12, AB = 6, AA_1 = 8$. Точка M на ребре AA_1 выбрана так, что $AM = 5$. Найти объём многогранника с вершинами в точках M, D, B_1, C_1.





Решение: Рассмотрим пирамиду MB_1C_1D с основанием B_1C_1D. Её высота равна расстоянию от точки M до плоскости (B_1C_1D).

По теореме Пифагора $C_1D = 10$, тогда площадь B_1C_1D: $S_{осн} = 60$.

Строим $MH \perp AB_1$. Так как MH лежит в плоскости (ABA_1), то $MH \perp AD$.

Таким образом $MH \perp (AB_1D)$, значит, отрезок MH и есть высота пирамиды MB_1C_1D.

ΔAMH подобен ΔAB_1A_1. Поэтому $\dfrac{MH}{A_1B_1} = \dfrac{AM}{AB_1}$. Отсюда $MH = 3$

Объём пирамиды MB_1C_1D равен $V = \dfrac{1}{3} \cdot 60 \cdot 3 = 60$

Ответ: 60

M7 *(ЕГЭ-С3)*. Решить неравенство $\log_{0,2}(4x+9) + \log_5(9-x^2) + \sin(3{,}5\pi) < 0$.

Решение: Преобразуем неравенство с учётом того, что $\sin(3{,}5\pi) = -1 = -\log_5 5$.

$\log_5(9-x^2) - \log_5(4x+9) - \log_5 5 < 0$

Это неравенство равносильно системе, составленной с учётом ОДЗ

$$\begin{cases} 9 - x^2 > 0 \\ 4x + 9 > 0 \\ \dfrac{9-x^2}{4x+9} < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x < 3 \\ x > -2{,}25 \\ x^2 + 20x + 36 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < x < 3$$

Ответ: $(-2;3)$

M8 *(ЕГЭ-С6)*. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{x+3}=2x-a$ имеет единственное решение.

Решение: Уравнение равносильно системе $\begin{cases} 2x-a\ge 0 \\ x+3=4x^2-4ax+a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{a}{2} \\ 4x^2-(4a+1)x+a^2-3=0 \end{cases}$

Обозначим квадратичную функцию в левой части уравнения $f(x)$. Система имеет единственное решение, если квадратичное уравнение $f(x)=0$ имеет единственное решение большее, чем $\dfrac{a}{2}$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} D=0 \\ x_в \ge \dfrac{a}{2} \end{cases} \\ f\left(\dfrac{a}{2}\right)<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 8a+49=0 \\ \dfrac{4a+1}{8}\ge \dfrac{a}{2} \end{cases} \\ -\dfrac{a}{2}-3<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-\dfrac{49}{8} \\ a>-6 \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{-\dfrac{49}{8}\right\}\cup(-6;\infty)$