Олимпиада для 9 классов по математике
«Будем учиться в России!»

23 апреля 2016 г. **г. Кишинёв**

1. Когда опытный и начинающий спортсмены бегут по стадиону в одну сторону, то опытный бегун обгоняет начинающего один раз в 15 минут. А когда они бегут навстречу друг другу, то встречаются один раз в 5 минут. Во сколько раз скорость опытного бегуна больше скорости начинающего?

Решение

Обозначим длину беговой дорожки l, скорость опытного бегуна – V_1, а начинающего – V_2.

Когда спортсмены бегут навстречу друг другу, то они сближаются со скоростью V_1+V_2 за 5 минут на расстояние l, т.е.

$$l=(V_1+V_2)\cdot 5 \qquad (1)$$

Догоняет опытный бегун начинающего со скоростью V_1-V_2 на расстоянии l за 15 минут, т.е.

$$l=(V_1-V_2)\cdot 15 \qquad (2)$$

Приравнивая l из (1) и (2) получим: $(V_1+V_2)\cdot 5=(V_1-V_2)\cdot 15$. Откуда $V_1=2V_2$

Ответ: в 2 раза.

2. Решите уравнение $x^2-\sqrt{9x^2-66x+121}-6x+7=0$

Решение

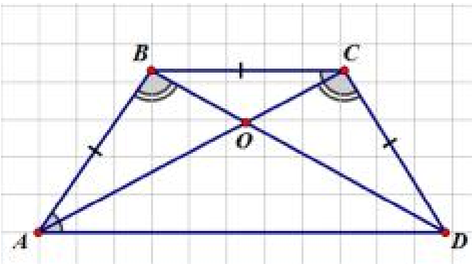
Заметив, что под корнем стоит полный квадрат, вынесем его из-под корня со знаком модуля. Получившееся уравнение $x^2-|3x-11|-6x+7=0$ решаем на интервалах.

При $x\geq\dfrac{11}{3}$ (1), получаем уравнение $x^2-9x+18=0$. Условию (1) удовлетворяет корень $x=6$.

При $x<\dfrac{11}{3}$ (2), получаем уравнение $x^2-3x-4=0$. Условию (2) удовлетворяет корень $x=-1$.

Ответ: $\{-1;6\}$

3. В равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны боковым сторонам и являются биссектрисами острых углов трапеции. В каком отношении делит диагонали точка их пересечения?



Решение

I способ

Т.к. AC – биссектриса $\angle BAC=\angle CAD=\angle ACB=a$

Поэтому ΔABC равнобедренный. Обозначим $AB=BC=a$.

$\angle BDA$ также равен a. Поскольку $3a=90^0$, то $a=30^0$.

Поэтому в ΔABD гипотенуза $AD=2a$. Треугольники BOC и AOD подобны, следовательно $\dfrac{BO}{OD}=\dfrac{BC}{AD}=\dfrac{a}{2a}$

II способ

Т.к. AC – биссектриса $\angle BAO=\angle OAD=a$. $\angle BDA$ также равен a. Поскольку $3a=90^0$, то $a=30^0$. Прямоугольные треугольники BOA и COD равны по катету и острому углу.

Т.к. $\angle BAO=30^0$, гипотенуза $AO=2BO$. А т.к. $AO=OD$, то $BO:OD=1:2$

Ответ: $1:2$

4. Найдите все x и y, которые удовлетворяют уравнению $(x^2+2x+4)(y^2-6y+11)=6$.

Решение

Первая скобка $x^2+2x+4=(x+1)^2+3\geq 3$, причём равенство достигается только при $x=-1$.

Вторая скобка $y^2-6y+11=(y-3)^2+2\geq 2$, и равенство достигается только при $y=3$.

Таким образом $(x^2+2x+4)(y^2-6y+11)\geq 6$, а равенство достигается только при $x=-1$, $y=3$.

Ответ: $(-1;3)$

5. Какое минимальное значение может принимать сумма квадратов корней уравнения $3x^2+30x+a=0$?

Решение

I способ

Уравнение имеет решение, когда $D=4\cdot(15^2-3a)\geq 0$, т.е. при $a\leq 75$.

По теореме Виета $x_1+x_2=-10$, а $x_1x_2=\dfrac{a}{3}$.

Тогда сумма квадратов корней $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=100-\dfrac{2}{3}a=S(a)$ является убывающей линейной функцией, которая минимальное значение может принимать только в правом конце интервала, т.е. при $a=75$. $S(75)=100-\dfrac{2\cdot 75}{3}=50$.

II способ

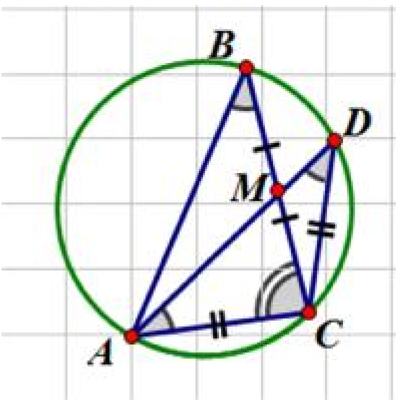
Уравнение имеет решение, когда $D=4\cdot(15^2-3a)\geq 0$.

Корни уравнения $x=\dfrac{-30\pm\sqrt{D}}{6}=-5\pm\sqrt{D^*}$, где $D^*=\dfrac{D}{36}\geq 0$.

Тогда $x_1^2+x_2^2=25+10\sqrt{D^*}+D^*+25-10\sqrt{D^*}+D^*=50+2D^*$. Минимальное значение $x_1^2+x_2^2$ равно 50, когда $D=0$.

Ответ: 50

6. Около треугольника *ABC* описана окружность. Медиана *AM* пересекает эту окружность в точке *D*. При этом $AD=DC=1$. Найдите длину стороны BC.



Решение

ΔADC равнобедренный по условию, потому $\angle ADC=\angle DAC$.

$\angle ADC=\angle ABC$, т.к. опираются на одну дугу.

Поэтому $\angle ABC=\angle MAC$. Угол $\angle BCA$ у треугольников ΔABC и ΔAMC общий, следовательно, эти треугольники подобны по I признаку.

Обозначим $BM=MC=x$. Тогда, в силу подобия, $\dfrac{MC}{AC}=\dfrac{AC}{BC}$ или $\dfrac{x}{1}=\dfrac{1}{2x}$. Откуда $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, а $BC=2x=\sqrt{2}$

Ответ: $\sqrt{2}$