М1. Решите неравенство $|x + x^2 + ... + x^n + ...| < 1$, где $|x| < 1$.

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = x$ и знаменателем $q = x$ равна $S = \frac{x}{1-x}$. Неравенство $\left|\frac{x}{1-x}\right| < 1$ равносильно системе неравенств $-1 < \frac{x}{1-x} < 1$. Решая эту систему с учётом условия $|x| < 1$, получаем ответ.
Ответ: $x \in (-1; 0,5)$.

М2. При каких значениях параметра a сумма четвёртых степеней корней квадратного уравнения $x^2 - x + a = 0$ принимает наименьшее значение?

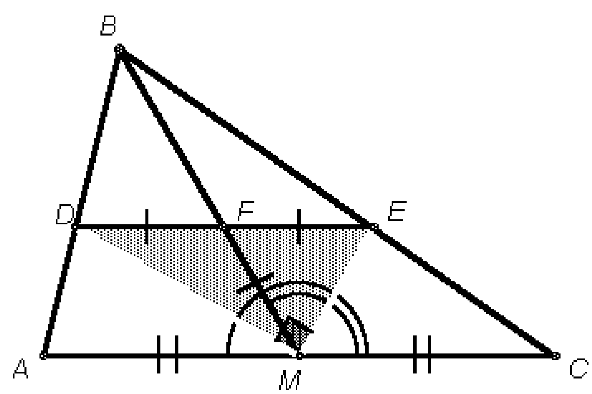
Уравнение имеет действительные корни при $D = 1 - 4a \geq 0$, то есть при $a \leq \frac{1}{4}$.
При таких a по теореме Виета $x_1 + x_2 = 1$, а $x_1 x_2 = a$.
Выразим сумму четвёртых степеней корней через a:

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 x_2^2 = ((x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2)^2 - 2x_1^2 x_2^2 = (1 - 2a)^2 - 2a^2 = 2a^2 - 4a + 1$$

Квадратичная функция $f(a) = 2a^2 - 4a + 1$ убывает на промежутке $(-\infty; 1]$ и возрастает на $[1; +\infty)$. Так как $a \leq \frac{1}{4}$, то наименьшее значение на промежутке $(-\infty; \frac{1}{4}]$ функция $f(a)$ принимает при $a = \frac{1}{4}$.
Ответ: $a = \frac{1}{4}$

М3. В треугольнике *ABC* точка *M* – середина *AC, MD* и *ME* – биссектрисы треугольников *ABM* и *CBM* соответственно. Отрезки *BM* и *DE* пересекаются в точке *F*. Найдите *MF*, если *DE* = *d*.

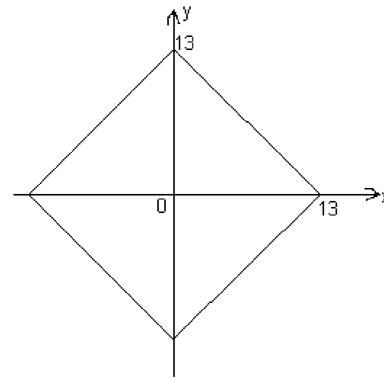
По свойству биссектрисы из треугольников *AMB* и *CMB* (см. рисунок) получим, что $\frac{AD}{BD} = \frac{AM}{BM}$ и $\frac{CE}{BE} = \frac{CM}{BM}$.



По условию, *AM* = *CM*, значит, $\frac{AD}{BD} = \frac{CE}{BE}$, следовательно, *DE* || *AC* (из подобия треугольников *DBE* и *ABC*). Тогда *F* – середина отрезка *DE*.
Так как *MD* и *ME* – биссектрисы смежных углов, то треугольник *DME* – прямоугольный. Его медиана *MF*, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы *DE*.

Ответ: 0,5*d*.

M4. Найдите наибольшее и наименьшее значение выражения $y - x^2$, если $|x| + |y| \le 13$.



Построим график уравнения $|x| + |y| = 13$ |, тогда данному неравенству удовлетворяют координаты всех точек, принадлежащих этому графику и точек, лежащих внутри ограниваемой им области (см. рисунок).
Пусть $y - x^2 = t$, тогда решение задачи сводится к тому, чтобы найти наибольшее и наименьшее значения переменной t, для которых график функции $y = x^2 + t$ имеет общие точки с найденным множеством.
Так как график указанной функции получается из параболы $y = x^2$ параллельным переносом вдоль оси y, то:

1) наибольшее значение t достигается, если вершиной параболы $y = x^2 + t$ является точка с координатами (0; 13), то есть, при $t = 13$;
2) наименьшее значение t достигается, если парабола $y = x^2 + t$ проходит через точки (13; 0) и (–13; 0), то есть, при $t = –169$.

Ответ: наибольшее значение равно 13, а наименьшее значение равно –169.

M5. Среди первых 99 натуральных чисел выбрано 50 чисел. Известно, что никакие два из них не дают в сумме ни 99, ни 100. Найдите сумму выбранных чисел.

Разобьем первые 99 натуральных чисел (кроме числа 50) на пары так, чтобы сумма чисел в каждой паре равнялась 100: (1; 99), (2; 98), ..., (48; 52), (49; 51).
Из условия следует, что из каждой пары могло быть выбрано только одно число, таких пар – 49, поэтому число 50 должно быть выбрано обязательно.
Тогда из последней пары не могло быть выбрано число 49 (иначе 50 + 49 = 99), то есть из нее выбрано число 51. Значит, из предпоследней пары должно было быть выбрано число 52 (иначе 48 + 51 = 99). Аналогичным рассуждением получим, что из предыдущей пары выбрано число 53, и так далее, до числа 99, выбранного из первой пары.
Таким образом, искомый набор чисел восстанавливается однозначно: 50, 51, ..., 99. Сумма чисел в таком наборе равна: 50 + 51 + ... + 99 = (50 + 99)× 25 = 149× 25 = 3725.

Ответ: 3725.

MC1. Решите уравнение $2\sin(x + \frac{\pi}{4}) = tgx + ctgx$

Поскольку $|tgx + ctgx| \ge 2$, а $2|\sin(x + \frac{\pi}{4})| \le 2$, то обе части могут быть равны только 2. Это условие выполняется, если x удовлетворяет одной из систем: (1) $\begin{cases} tgx = 1 \\ \sin(x + \frac{\pi}{4}) = 1 \end{cases}$ или (2) $\begin{cases} tgx = -1 \\ \sin(x + \frac{\pi}{4}) = -1 \end{cases}$.

Вторая система несовместна. Решение первой системы даёт ответ.

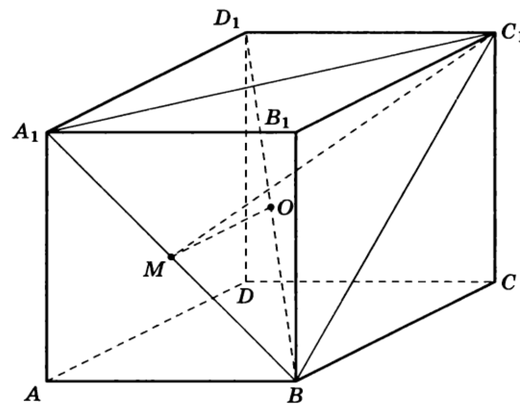
Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{4} + 2\pi n \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$

МС2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостями BA_1C_1 и BA_1D_1.

Пусть точка O – центр куба, а точка M – середина ребра A_1B. $A_1D_1 \perp A_1B$, а MO – средняя линия треугольника BA_1D_1, поэтому $MO \perp A_1B$. Треугольник BA_1C_1 равносторонний, поэтому $C_1M \perp A_1B$. Таким образом, искомый угол – это $\angle OMC_1$. Обозначим его α.

Найдём стороны треугольника OMC_1.

Из треугольника BA_1D_1 находим $OM = 0,5$.



Из треугольника BA_1C_1 находим $MC_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} A_1C_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$. Так как O – середина диагонали AC_1, то $OC_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Теперь запишем теорему косинусов для треугольника OMC_1: $(OC_1)^2 = (OM)^2 + (MC_1)^2 - 2(OM)(MC_1)\cos\alpha$. Подставим длины сторон треугольника OMC_1: $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{2} - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}\cos\alpha$. Отсюда $\cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Ответ: $\arccos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

МС3. Решите неравенство $$\frac{\log_{2^{x+7}} 4}{\log_{2^{x+7}}(-16x)} \le \frac{1}{\log_2 \log_{\frac{1}{2}} 2^x}.$$

Решение ищем на множестве: $\begin{cases} x < 0 \\ x \ne -7 \\ x \ne -1 \\ x \ne -\frac{1}{16} \end{cases}$

Пусть $y = \log_2(-x)$. Тогда неравенство принимает вид $\frac{2}{4+y} \le \frac{1}{y}$, откуда $y < -4$ или $0 < y \le 4$.

Значит $-16 \le x < -1$ или $-\frac{1}{16} < x < 0$. Из полученных промежутков надо исключить x=7.

Ответ: $x \in [-16;-7) \cup (-7;-1) \cup (-\frac{1}{16};0)$.

МС4. Высота равнобедренного треугольника, опущенная на его основание, равна 9, а радиус вписанной в треугольник окружности равен 4. Найдите радиус окружности, касающейся стороны треугольника и продолжений двух других его сторон.

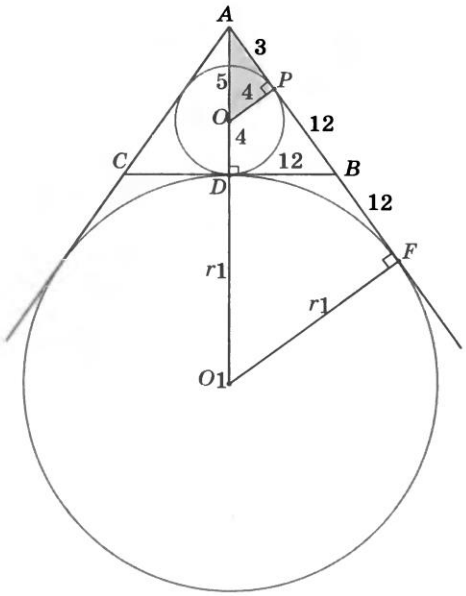


Рис. 1

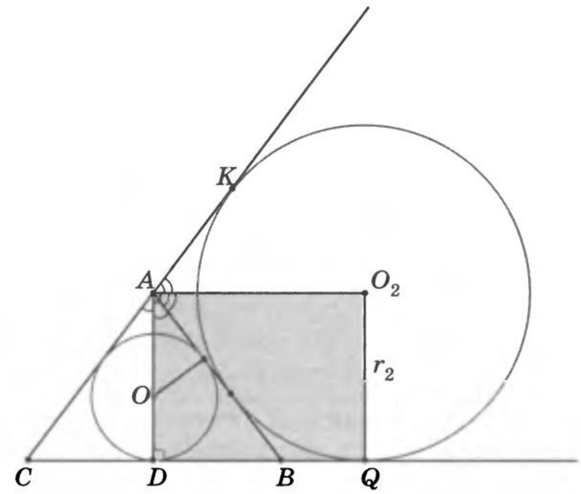


Рис. 2

Пусть AD – высота равнобедренного ΔABC, опущенная на его основание *BC,* Обозначим *O* – центр вписанной окружности, *P* – точку ее касания с боковой стороной AB, $\angle BAD = \alpha$.

Тогда *AO = AD – OD = 9 – 4 = 5*. Из прямоугольного ΔAOP находим $AP = 3$, $\sin\alpha = \dfrac{OP}{OA} = \dfrac{4}{5}$.

Тогда $BD = ADtg\alpha = 9 \cdot \dfrac{4}{3} = 12$.

Пусть окружность с центром O_1 и радиусом r_1 касается продолжений боковых сторон *AB* и *AC* в точках *F* и *G* соответственно (рис. 1), а также основания *BC*. Тогда *D* – точка касания, поэтому $BF = BD = BP = 12$, $AF = AP + PB + BF = 3 + 12 + 12 = 27$.

Следовательно, $r_1 = O_1F = AFtg\alpha = 27 \cdot \dfrac{4}{3} = 36$.

Пусть теперь окружность с центром O_2 радиуса r_2 касается боковой стороны *AB,* продолжения основания *BC* в точке *Q* и продолжения боковой стороны *AC* в точке *K* (рис. 2). Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому AO_2 и *AD* – биссектрисы смежных углов *BAK* и *DAB*, значит, $\angle DAO_2 = 90°$. Тогда $ADQO_2$ – прямоугольник. Следовательно, $r_2 = O_2Q = AD = 9$.

МС5. При каких значениях параметра *a* система имеет единственное решение:

$$\begin{cases} x + \sqrt{y} = 1 \\ a + 3 - \sqrt{y} = \dfrac{1}{2}(a - x)^2 \end{cases}$$

Выразим из 1-го уравнения $\sqrt{y}$ и подставим его во 2-ое уравнение при условии $\sqrt{y} = 1 - x \ge 0$.

Исходная система будет иметь единственное решение тогда и только тогда, когда уравнение $a+2+x=\frac{1}{2}(a-x)^2$ будет иметь только одно решение, удовлетворяющее условию $1-x\geq 0$.

Это квадратное уравнение преобразуется к виду: $x^2-2(a+1)x+a^2-2a-4=0$. Для того, чтобы оно имело единственное решение $x\leq 1$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}D=0\\ x_0\leq 1\end{cases}\\ f(1)<0\\ \begin{cases}f(1)=0\\ x_0>1\end{cases}\end{array}\right., \text{ где } \begin{array}{c}D=4((a+1)^2-(a^2-2a-4))\\ f(1)=a^2-4a-5\\ x_0=a+1\end{array}. \text{ Тогда } \left[\begin{array}{l}\begin{cases}4a+5=0\\ a+1\leq 1\end{cases}\\ a^2-4a-5<0\\ \begin{cases}a^2-4a-5=0\\ a+1>1\end{cases}\end{array}\right..$$

Решение первой системы $a=-\frac{5}{4}$, второго неравенства – $a\in(-1;5)$, третьей системы – $a=5$.

Ответ: $a\in\left\{-\frac{5}{4}\right\}\cup(-1;5]$

<u>Примечание:</u> За ответ $a=-\frac{5}{4}$, <u>без проверки условия</u> $x_0\leq 1$ – 0 баллов! За тот же ответ с проверкой условия $x_0\leq 1$ – 2 балла.