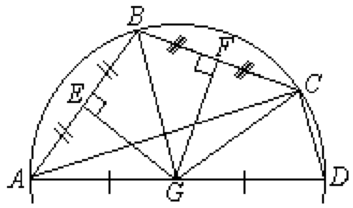
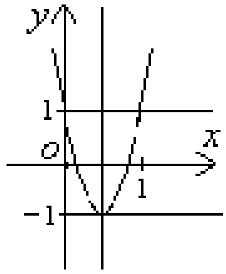
Математика (Ответы и решения)

М1. Данное число не делится на 4, поскольку число, составленное из двух его последних цифр – 34 – не делится на 4. А, значит, указанное в условии число не делится и на 24.
Замечание. Делимостью на 3 воспользоваться не удастся, т. к. данное число делится на 3.

М2. Так как каждый из отрезков *GE* и *GF* является одновременно высотой и медианой в треугольниках *AGB* и *BGC* соответственно (см. рисунок), то *DG* = AG = *BG* = *CG*. Следовательно, *G* – центр окружности, описанной около данного четырехугольника.
$\angle ACD = 90°$, так как это вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности.





М3. Так как g(0) = g(1) = 1, то графиком трехчлена является парабола, симметричная относительно прямой x = 0,5 (см. рисунок). Из условия $|g(x)| \le 1$ при $0 \le x \le 1$ следует, что «ветви» параболы направлены вверх, а наибольшее значение a достигается в случае, когда наименьшее значение функции равно –1. Из того, что g(0,5) = –1, получаем, $\boldsymbol{a}$ **= 8**.

М4. При x = $-\sqrt{2}$ получим: $2f(-\sqrt{2})+f(1)=1$. Для того, чтобы найти $f(1)$, рассмотрим данное соотношение при x = 0; ± 1. Тогда, $\begin{cases} 2f(0)+f(-1)=1, \\ 2f(1)+f(0)=1, \\ 2f(-1)+f(0)=1. \end{cases}$ Решая эту систему, получим: $f(0)=f(1)=f(-1)=1/3$. Значит, $f(-\sqrt{2})=1/3$. Ответ: 1/3.

М5. Рассмотрим число $a=\overbrace{11...1}^{2017}$ и сложим «в столбик» числа: $a, 10a, 10^2a, ..., 10^7a$ – получим числитель исходной дроби m; а складывая числа: $a, 10a, 10^2a, ..., 10^7a, 10^8a$ – получим знаменатель – n, где $m=ap$, $n=aq$ (p = 11 111 111, q = 111 111 111) и числа p, q – взаимно простые.

Ответ: $\dfrac{11111111}{111111111}$.

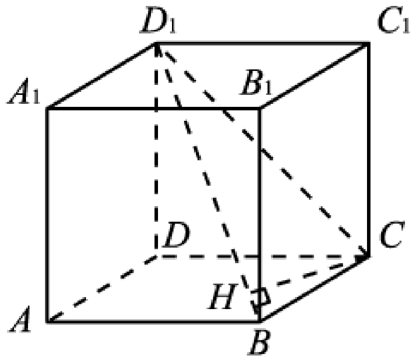
МС1. Из неравенства $6x-x^2+8\ge 0$ получаем: $2\le x\le 4$.
1 случай. Пусть x = 2 или x = 4. Если x = 4, то $\sin x<0$; если x=2, то $\sin x>0$. Из второго уравнения получаем: $2-y-y^2=0$, откуда y = –2 или y = 1.
Если y = –2, то $\cos y<0$. Если y=1, то $\cos y>0$. Значит, x =2, y = 1.

2 случай. Пусть теперь $2<x<4$. Тогда $6x-x^2-8>0$, и поэтому из первого уравнения получаем: $\cos y=0$.

Учтем, что $2-y-y^2\ge 0$. Тогда $-2\le y\le 1$. Из всех решений уравнения $\cos y=0$ этому условию удовлетворяет только $y=-\dfrac{\pi}{2}$. При этом $2-y-y^2>0$ и, из второго уравнения получаем уравнение: $\sin x = 0$. Из его решений интервалу (2;4) принадлежит только $x = \pi$. Значит $x = \pi, y = -\frac{\pi}{2}$. ***Ответ***: $(2;1)$, $(\pi; -\frac{\pi}{2})$.

МС2. .Проведем отрезок CD_1 и опустим перпендикуляр *CH* на BD_1. Искомое расстояние равно высоте *CH* прямоугольного треугольника BCD_1 с прямым углом *C*:

$$CH = \frac{CD_1 \cdot BC}{BD_1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$



Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

МС3. Так как $0 < 7^{-|x-3|} \le 1$ и $\log_2(6x - x^2 - 7) = \log_2(2 - (x-3)^2) \le 1$, переходим к системе

$$\begin{cases} \log_2(2 - (x-3)^2) = 1, \\ 7^{-|x-3|} = 1. \end{cases}$$

Получаем: $x = 3$ ***Ответ***: $x = 3$.

МС4. Пусть центры окружностей O_1 и O_2, а точки касания *A* и *B*. Проведем через точку *B* прямую, параллельную O_1O_2. Точку пересечения этой прямой с O_1A обозначим *K*. Треугольник *KAB* прямоугольный.

Возможны два случая расположения окружностей и общей касательной.

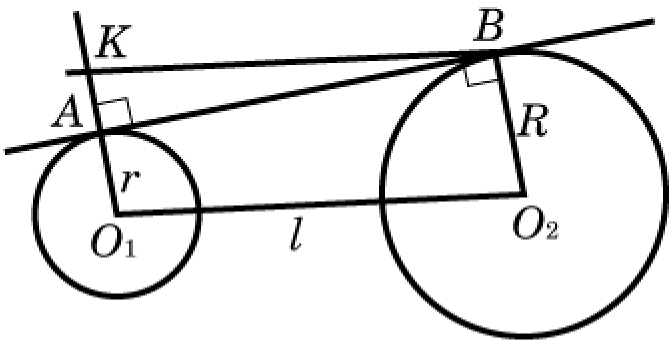


Рис. 1

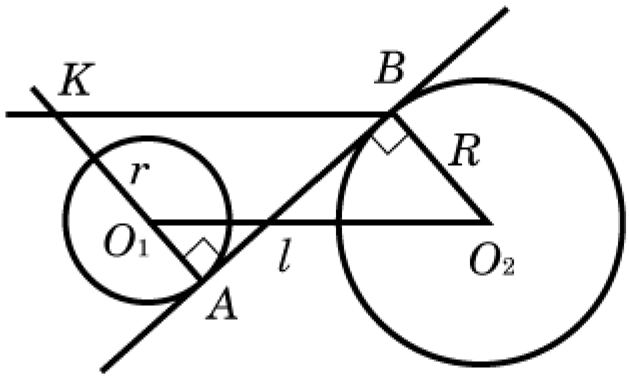
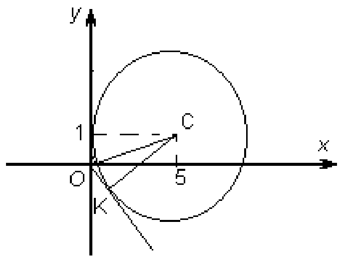


Рис. 2

1. Окружности лежат по одну сторону от касательной (рисунок 1).
2. Окружности лежат по разные стороны от касательной (рисунок 2).

Обозначим радиусы окружностей *R* и *r*, расстояние между центрами окружностей *l*.
В первом случае $AK = R - r$, во втором случае $AK = R + r$.
Из прямоугольного треугольника *KAB* находим:
в первом случае $AB = \sqrt{l^2 - (R-r)^2} = \sqrt{34^2 - 16^2} = 30$,
во втором случае $AB = \sqrt{l^2 - (R+r)^2} = \sqrt{34^2 - 30^2} = 16$.
Ответ: 30 или 16.

МС5. Первый способ. Так как $x^2-10x+y^2-2y+1=0 \Leftrightarrow (x-5)^2+(y-1)^2=5^2$, то данное уравнение задает в координатной плоскости окружность с центром C (5; 1) и радиусом 5 (см. рисунок). Для любой точки K этой окружности отношение $\frac{y}{x}$ задает тангенс угла α между положительным направлением оси абсцисс и лучом OK, причем, если точка K лежит в I координатной четверти, то $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, а если K лежит в IV координатной четверти, то $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$. В данном случае, тангенс принимает наименьшее значение, если (OK) – одна из касательных к окружности (см. рисунок).



Координаты точки K можно находить различными способами, например: $OK^2 = OC^2 - CK^2 = (1^2 + 5^2) - 5^2 = 1$, поэтому точка K (x; y) лежит также на окружности с центром O (0; 0) и радиусом 1. (Этот же результат можно получить из равенства двух касательных к окружности, проведенных из точки O.)

Находим координаты точек пересечения двух окружностей: $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x^2-10x+y^2-2y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ 10x+2y-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1, \\ y=1-5x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0, \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{5}{13}, \\ y=-\frac{12}{13}. \end{cases} \end{array} \right.$ Так как K ($\frac{5}{13}; -\frac{12}{13}$), то искомое отношение $\frac{y}{x}=-\frac{12}{5}$.

Можно также вычислить тангенс угла KOX, не находя координат точки K. Так как $\angle KOX = \angle COK - \angle COX$, $tg\angle COK=5$, $tg\angle COX=\frac{1}{5}$, то по формуле $tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}$ получим, что $tg\angle KOX=\frac{12}{5}$. Учитывая, что K лежит в IV координатной четверти, получим, что искомое отношение $\frac{y}{x}=-\frac{12}{5}$.

Второй способ. Пусть $k=\frac{y}{x}$, тогда задача сводится к тому, чтобы найти наименьшее значение k, при котором система уравнений $\begin{cases} y=kx, \\ x^2-10x+y^2-2y+1=0 \end{cases}$ имеет решение.

Подставим значение y во второе уравнение и преобразуем: $x^2-10x+k^2x^2-2kx+1=0 \Leftrightarrow (1+k^2)x^2 - 2(5+k)x+1=0$. Рассматриваемая система уравнений имеет решения т. и т. т., когда имеет решения полученное квадратное уравнение, то есть, когда это уравнение имеет неотрицательный дискриминант. Значит, $(5+k)^2-(1+k^2)\ge 0 \Leftrightarrow 10k \ge -24 \Leftrightarrow k \ge -2{,}4$. Наименьшее значение k, удовлетворяющее этому условию, равно $-2\frac{2}{5}$.

Ответ: $-2\frac{2}{5}$.