Олимпиада «Будем учиться в России!»

12 сентября 2015 г. **г. Кишинёв**

Вариант 1

1. Упростить выражение $(\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2})$

Можно группировать скобки в любом порядке, но проще сгруппировать первую скобку с третьей, а вторую – с последней. Оба произведения сворачиваются в разность квадратов $\left((\sqrt{3}+\sqrt{2})^2-5\right)\left(5-(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2\right)=2\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{6} = 24$

Ответ: 24

2. Решите уравнение $3x^2-3\sqrt{4x^2+20x+25}+5x-9=0$

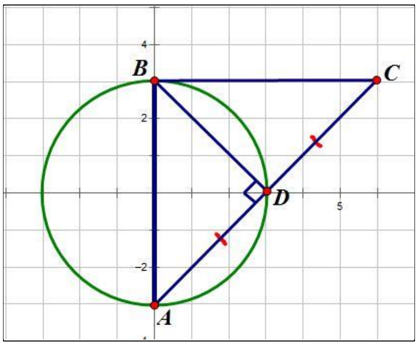
Заметив, что под корнем стоит полный квадрат, вынесем его из-под корня со знаком модуля. Получившееся уравнение $3x^2-|6x+15|+5x-9=0$ решаем на интервалах.

При $x\geq -2,5$ (1), получаем уравнение $3x^2-x-24=0$. Условию (1) удовлетворяет корень $x=3$.

При $x<-2,5$ (2), получаем уравнение $3x^2+11x+6=0$. Условию (2) удовлетворяет корень $x=-3$

Ответ: $\{-3;3\}$

3. AB – диаметр окружности; BC – касательная. Секущая AC делится окружностью (в точке D) пополам. Найти угол DAB.



Соединим точки B и D. Угол BDA – прямой, т.к. опирается на диаметр. Таким образом, BD – одновременно является высотой и медианой, следовательно, треугольник ABC – равнобедренный.

Угол ABC – прямой, т.к. BC – касательная.

В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC углы при основании равны 45^0.

Ответ: 45^0

4. При покупке ребенку новых лыж с ботинками родителям пришлось заплатить на 25% больше денег, чем год назад, причем лыжи подорожали с тех пор на 15%, а ботинки — на 40% от первоначальной стоимости. На сколько процентов год назад лыжи были дороже ботинок?

Пусть год назад цена лыж была l, а ботинок – b.
Тогда в этом году пришлось заплатить $(l+b)\cdot 1,25=1,15l+1,4b$.

Приводя подобные члены, получим $\frac{l}{b}=\frac{0,15}{0,1}=1,5$. Лыжи были дороже ботинок на 50%.

Ответ: 50%

5. При каких значениях параметра k корнями уравнения $x^2+xk^2+k(4x-1)-5x=0$ являются два противоположных числа?

Исходное уравнение является квадратным относительно x: $x^2+(k^2+4k-5)x-k=0$ и по теореме Виета – **если это уравнение имеет корни**, то их сумма равна (k^2+4k-5). По условию корнями являются два противоположных числа, а значит $k^2+4k-5=0$. Решая последнее уравнение, находим $k=-5$ или $k=1$. Но при $k=-5$ уравнение $k^2+5=0$ корней не имеет.

Ответ: $k=1$

6. В прямоугольнике $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ и $BC = 10$ на стороне AD расположены точки M и N. При этом $DM = 4$, прямые BN и CM пересекаются в точке P, а площадь треугольника MNP равна 1. Найдите расстояние между точками M и N.

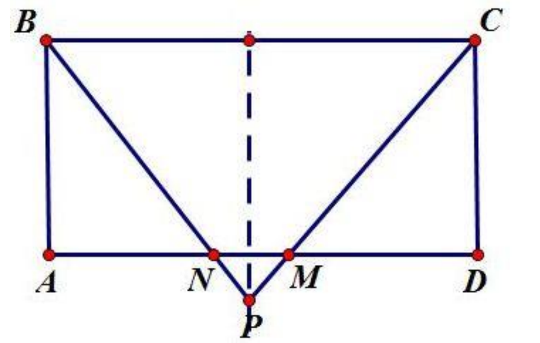


Рисунок 1

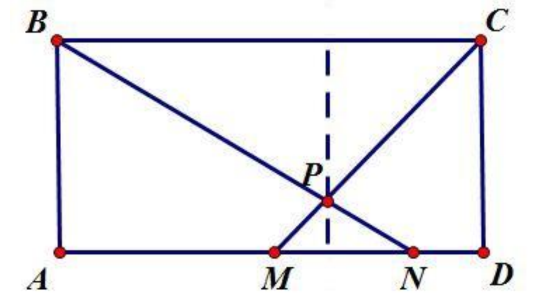


Рисунок 2

Обозначим длину искомого отрезка MN через x, а высоту треугольника MNP – h.

Прямые BN и CM могут пересекаться как внутри прямоугольника $ABCD$ (рис.2), так и вне его (рис.1). В обоих случаях треугольники BCP и MNP подобны, а значит, их основания относятся так же, как высоты, т.е. $\frac{x}{10} = \frac{h}{4 \pm h}$ (здесь знак «+» соответствует 1-му случаю, а знак «–» соответствует 2-му случаю).

Поскольку площадь треугольника MNP равна 1, $xh = 2$.

Решая систему двух уравнений с неизвестными x и h, выразим h через x и поучим квадратное относительно x уравнение: $2x^2 \pm x - 10 = 0$

В 1-м случае (со знаком «+») положительный корень уравнения равен 2, т.е. $MN = 2$

Во 2-м случае (со знаком «–») положительный корень уравнения равен 2,5, т.е. $MN = 2,5$

Ответ: 2 или 2,5

Олимпиада «Будем учиться в России!»

12 сентября 2015 г. **г. Кишинёв**

Вариант 2

1. Упростить выражение $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\sqrt{2-\sqrt{3}}+\left(\sqrt{\frac{2}{3}}-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\sqrt{2+\sqrt{3}}$

Приведём к общему знаменателю слагаемые в скобках, получим $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\sqrt{2-\sqrt{3}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Вынесем за скобку общие множители, получим выражение $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{6}}(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}})$.

Если возвести в квадрат сумму, стоящую в скобках, получим 6. Т.е. сама скобка равна $\sqrt{6}$.
Произведение $\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}=1$.
Ответ: 1

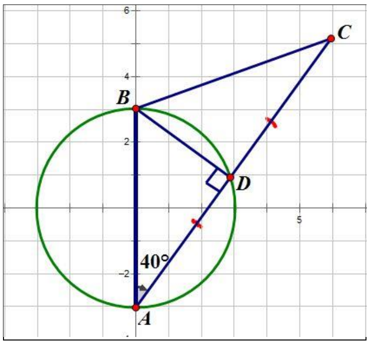
2. Решите неравенство $\frac{3(x+1)^2-16}{3|x+1|-6}\le\frac{11}{6}$

Введём замену переменных $t=|x+1|$, тогда исходное неравенство примет вид $\frac{3t^2-16}{3(t-2)}-\frac{11}{6}\le 0$ или $\frac{6t^2-11t-10}{t-2}\le 0$. Решая это неравенство методом интервалов и учитывая, что $t\ge 0$, получим $2<t\le 2,5$. Возвращаемся к переменной x и решаем систему

$$\begin{cases}|x+1|>2\\|x+1|\le 2,5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>1\\x<-3\end{array}\right.\\-3,5\le x\le 1,5\end{cases}\Leftrightarrow x\in[-3,5;-3)\cup(1;1,5]$$

Ответ: $[-3,5;-3)\cup(1;1,5]$

3. AB – диаметр окружности. Секущая AC делится окружностью (в точке D) пополам и составляет с диаметром AB угол 40^0. Найти угол ABC.



Соединим точки B и D. Угол BDA – прямой, т.к. опирается на диаметр. Таким образом, BD – одновременно является высотой и медианой, следовательно, треугольник ABC – равнобедренный.

В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC углы при основании равны 40^0, следовательно, угол при вершине равен $\angle ABC=180^0-40^0-40^0=100^0$

Ответ: 100^0

4. На заводе рабочий день уменьшился с 8 до 7 часов. На сколько процентов нужно повысить производительность труда, чтобы количество выпускаемой за день продукции увеличилось на 5%?

Обозначим производительность труда v, время t, а количество продукции S. Тогда $S=vt$.
Т.е. $S_1=7v_1$, а $S_2=8v_2$.

Количество продукции увеличилось на 5%, т.е. $\frac{S_2-S_1}{S_1}=0,05=\frac{1}{20}$.

Тогда $\frac{7v_2}{8v_1} = \frac{S_2}{S_1} = \frac{1}{20} + 1 = \frac{21}{20}$. Таким образом $\frac{v_2}{v_1} = \frac{6}{5}$, а производительность труда повысится на

$$\frac{v_2 - v_1}{v_1} \cdot 100\% = \left(\frac{v_2}{v_1} - 1\right) \cdot 100\% = \left(\frac{6}{5} - 1\right) \cdot 100\% = 20\%$$

Ответ: 20%

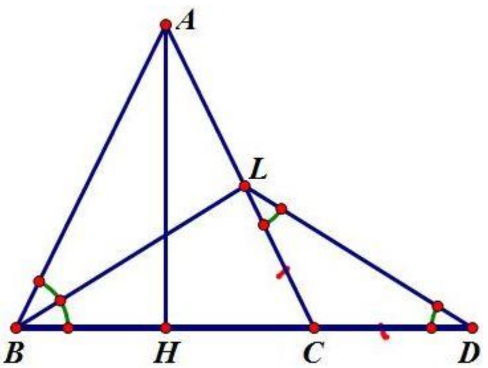
5. При каких значениях a неравенство $a^2 + ax + 2x - 11 \geq 0$ выполняется при всех действительных x таких, что $|x| \leq 2$?

Линейная функция $f(x) = (a+2)x + a^2 - 11 \geq 0$ на отрезке $[-2; 2]$ тогда и только тогда, когда она неотрицательна в концах этого отрезка. Т.е. должны выполняться условия

$\begin{cases} f(-2) = a^2 - 2a - 15 \geq 0 \\ f(2) = a^2 + 2a - 7 \geq 0 \end{cases}$, что равносильно $\begin{cases} a \in (-\infty; -1 - 2\sqrt{2}) \cup (-1 + 2\sqrt{2}; +\infty) \\ a \in (-\infty; -3 \cup (5; +\infty) \end{cases}$

Ответ: $a \in (-\infty; -1 - 2\sqrt{2}) \cup (5; +\infty)$

6. В ΔABC со сторонами $AB = AC = 25$ и углом при основании равным $\arccos\frac{1}{3}$ проведена биссектриса BL $(L \in AC)$. На прямой BC выбрана точка D так, что $BL = LD$.
Найдите расстояние между точками D и C.



Обозначим $\angle LBC = \angle LBA = \alpha$
Т.к. ΔBLD равнобедренный, $\angle LDB = \alpha$
Т.к. ΔABC равнобедренный, $\angle ACB = 2\alpha$. Это внешний угол ΔLDC, значит $\angle DLC = 2\alpha - \alpha = \alpha$. В ΔLDC два угла равны, следовательно, он равнобедренный и $DC = LC$.
Т.к. $\cos\angle ABH = \frac{1}{3}$ можно обозначить $BH = x$, а $BA = 3x$.
AH – высота и медиана, поэтому также и $HC = x$, а $BC = 2x$.
Поскольку BL – биссектриса, то $\frac{LC}{AL} = \frac{BC}{AB} = \frac{2x}{3x}$
Т.к. AC = 25, то LC = 10, значит и $DC = 10$

Ответ: 10