Вариант 1

1. Упростить выражение $\sqrt{(\sqrt{5}-2,5)^2}-\sqrt[3]{(1,5-\sqrt{5})^3}-3$

Решение: $\left|\sqrt{5}-2,5\right|-(1,5-\sqrt{5})-3$

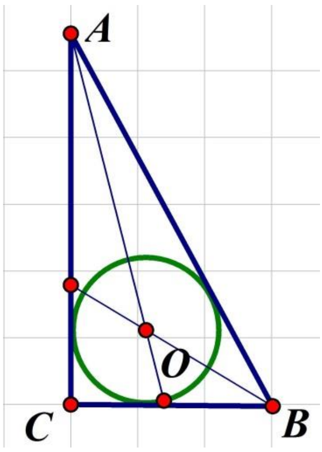
Ответ: $x=-2$

2. Решите уравнение $\dfrac{1}{x-4}+\dfrac{1}{x-5}+\dfrac{1}{x-6}+\dfrac{1}{x-7}=0$

Решение: Сгруппируем первое слагаемое с последним и 2-е с 3-м. $\dfrac{2x-11}{(x-7)(x-4)}+\dfrac{2x-11}{(x-5)(x-6)}=0$

Приведём к общему знаменателю $(2x-11)(x^2-11x+30+x^2-11x+28)=0$. Первый сомножитель обращается в 0 при $x=5,5$. Второй сомножитель $x^2-11x+29=0$ имеет ещё 2 корня

Ответ: $\left\{5,5;\dfrac{11\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$



3. В прямоугольный треугольник ABC вписана окружность. Расстояния от её центра до острых углов равны $\sqrt{5}$ и $\sqrt{10}$.
Чему равна гипотенуза этого треугольника?

Решение: Поскольку AO и BO – биссектрисы, то
$\angle AOB=180^0-\left(\dfrac{\angle A}{2}+\dfrac{\angle B}{2}\right)=180^0-45^0=135^0$.
По теореме косинусов для треугольника AOB:
$AB^2=5+10-2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}\cdot\cos 135^0=25$.
Таким образом, гипотенуза AB = *5.*

Ответ: *5*

4. От лесоповала вниз по течению реки движется плот. Плотовщик доплывает на моторной лодке из конца плота к его началу и обратно за 12 минут. Найдите длину плота, если собственная скорость лодки равна 15 км/ч.

Решение: Если скорость плота (течения реки) U, то из конца плота к его началу плотовщик плывёт со скоростью (15 + U) относительно берега и со скоростью (15 + U) – U = 15 км/ч относительно плота. С такой же скоростью (15 – U) +U он приближается от носа к корме. Если длина плота в метрах l, то $2l=12\textit{мин.}\cdot\dfrac{15000}{60}\textit{м / мин.}$

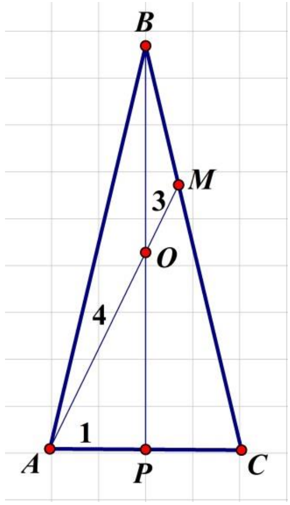
Ответ: 1500 м

5. При каких значениях параметра *a* уравнение $(x^2-2x)^2-(a+2)(x^2-2x)+3a-3=0$ имеет 4 различных действительных корня?

Решение: Заменой $y=x^2-2x$ (1) уравнение приводится к виду $y^2-(a+2)y+3a-3=0$ (2). Чтобы исходное уравнение имело 4 различных действительных корня, уравнение (2) должно иметь 2 различных действительных корня. Дискриминант уравнения (2) $D=(a-4)^2$ больше 0, при $a\neq 4$. В этом случае уравнение (2) имеет корни $y_1=3$ и $y_2=a-1$.
Чтобы вернуться к замене, необходимо решить уравнение (1). Его дискриминант положителен при $y>-1$. Корни уравнения (2) удовлетворяют этому условию при $a>0$.

Ответ: $a\in(0;4)\cup(4;\infty)$

6. В равнобедренном ΔABC $AB = BC$. Биссектриса AM пересекает высоту BP в точке O. $AO = 4$, $OM = 3$, $AC = 2$. Найти AB.



Решение: Поскольку ΔABC равнобедренный, BP – не только высота, но и медиана, а стало быть $AP = 1$. Рассмотрим прямоугольный ΔAOP. В нём катет $OP > AP$, значит $tg\angle OAP > 1$ и $\angle OAP > 45^0$.

Т.к. AO – медиана $\angle BAC$, то $\angle BAC > 90^0$, чего быть не может. Треугольника с такими размерами не существует.

Участниками олимпиады были предложены решения, в которых либо использовались только размеры отрезков, но не использовалось условие, что AM – биссектриса, либо условие $AO = 4$, $OM = 3$ фактически заменялось условием AO**:**$OM = 4$**:**3.
Такие решения при безошибочных выкладках оценивались половиной максимального балла.

Вариант 2

1. Упростить выражение $\left(\sqrt{(\sqrt{2}-1,5)^2}-\sqrt[3]{(1-\sqrt{2})^3}\right)^2+0,75$

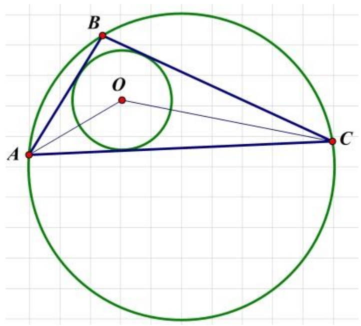
Решение: $(\left|\sqrt{2}-1,5\right|-(1-\sqrt{2}))^2+0,75=0,25+0,75$

Ответ: $x=1$

2. Решите уравнение $(x^2-1)(x-3)(x-5)=20$

Решение: Разложим на множители первую скобку $(x+1)(x-1)(x-3)(x-5)=20$ и перегруппируем сомножители – первый с последним и 2-й с 3-м. Уравнение $(x^2-4x-5)(x^2-4x+3)=20$ заменой $y=x^2-4x$ сводится к квадратному уравнению $y^2-2y-35=0$.

Ответ: $\left\{2\pm\sqrt{11}\right\}$



3. Около треугольника ABC описана окружность и в треугольник ABC вписана окружность с центром в точке O. Найти дугу AC, описанной окружности, если $\angle AOC = 140^0$.

Решение:

Так как AO и CO – биссектрисы, то $\angle AOC = 180^0 - \left(\frac{\angle A}{2}+\frac{\angle C}{2}\right) = 140^0$.

Отсюда $\angle A + \angle C = 80^0$, а $\angle B = 100^0$. Это вписанный угол, значит он опирается на дугу в 200^0.

Ответ: 200^0

4. Лыжные соревнования проходят на круговой лыжне. Первый лыжник проходит один круг на 2 минуты быстрее второго и через час опережает второго ровно на один круг. За сколько минут второй лыжник проходит один круг?

Решение: Примем длину трассы за 1. V_1 – скорость первого лыжника, V_2 – второго. Тогда $V_1 - V_2 = \frac{1}{60}$, или $\frac{1}{t}-\frac{1}{t+2}=\frac{1}{60}$. Решая уравнение, находим $t=10$ – время, за которое проходит круг первый лыжник, а второй на 2 минуты дольше.

Ответ: *12* минут

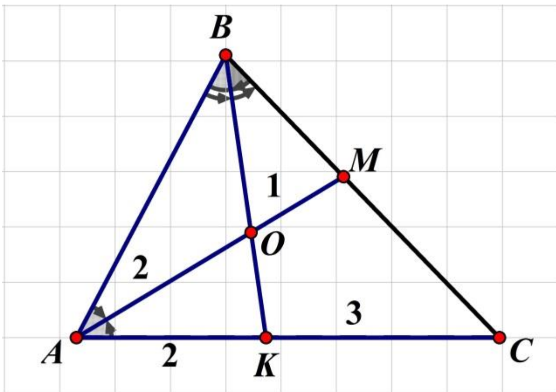
5. При каких значениях параметра c неравенство $(c^2-1)x^2+2(c-1)x-2<0$ выполняется при всех действительных x?

Решение: 1) При $c = 1$ неравенство справедливо для всех действительных x. При $c = -1$ – только при $x<\frac{1}{2}$.

2) Если $c\neq\pm1$, функция в левой части неравенства является квадратичной. Квадратный трёхчлен принимает отрицательные значения при всех действительных x, если выполняются следующие условия: $\begin{cases} c^2-1<0 \\ D<0 \end{cases}$. $\frac{D}{4}=3c^2-2c-1$. Решение этой системы $c\in\left(-\frac{1}{3};1\right)$. С учётом вырожденного случая ($c^2-1=0$) получим ответ.

Ответ: $c\in\left(-\frac{1}{3};1\right]$

6. Биссектрисы AM и BK ΔABC пересекаются в точке O. $AO = 2$, $OM = 1$, $AK = 2$, $CK = 3$. Найти периметр ΔABC.



Решение:
Т.к. BK – биссектриса ΔABC, $AB : BC = AK : KC = 2 : 3$.
Обозначим $AB = 2x$, тогда $BC = 3x$
Т.к. BO – биссектриса ΔABM, $AB : BM = AO : OM = 2 : 1$.
Поэтому $BM = x$, а $MC = 2x$
Т.к. AM – биссектриса ΔABC, $AB : AC = BM : MC = 1 : 2$.
Поэтому $AB = 0,5\ AC = 2,5$, т.е. $x = 1,25$.
Тогда периметр ΔABC равен $5 + 2,5 + 3,75 = 11,25$
Ответ: $11,25$