М1. Найти значения переменной x такие, что числа $\sqrt{x^2+2x+1}, \frac{x^2+3x-1}{3}, x-1$ взятые в указанном порядке, образуют арифметическую прогрессию

Ответ: $\{-2;-1;1\}$

По основному свойству арифметической прогрессии её средний член равен полусумме предыдущего и последующего членов. Записав первое число как $|x+1|$, получим уравнение $\frac{x^2+3x-1}{3}=\frac{|x+1|+x-1}{2}$. Решая уравнение с модулем, получаем ответ.

М2. Производительность первого станка на 25% больше производительности второго станка. На втором станке выточено деталей на 4% больше, чем на первом. На сколько процентов время работы второго станка больше времени работы первого станка?

Ответ: на 30%

Обозначим производительность станков V_1 и V_2 время их работы t_1 и t_2, объём выполненной работы S_1 и S_2 (соответственно). Тогда $V_1=1,25V_2$, $S_2=1,04S_1$.

Искомый процент обозначим p.

Найдём $\frac{p}{100}=\frac{t_2-t_1}{t_1}=\frac{t_2}{t_1}-1=\frac{S_2\cdot V_1}{V_2\cdot S_1}-1=1,04\cdot 1,25-1=0,3$.

М3. Найти целые значения x и y, удовлетворяющие системе уравнений: $\begin{cases} x^2+xy+2y^2=8 \\ x^2+6x+y^2=4y-12 \end{cases}$

Ответ: $(-2;2)$, $(-3;1)$

Выделив во втором уравнении полные квадраты, представим его в виде $(x+3)^2+(y-2)^2=1$.

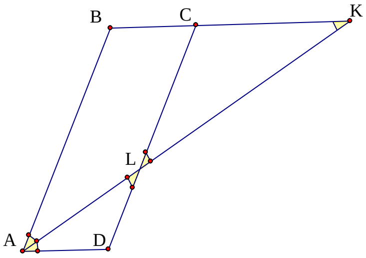
Сумма двух целых чисел равна 1, следовательно, одно из них 1, а другое 0.

Можно найти «целые» точки перебором или указать их на окружности, которая является графиком второго уравнения. Таких точек всего четыре: $(-3;3),(-2;2),(-3;1),(-4;2)$.

Осталось проверить, какие их них удовлетворяют первому уравнению.

М4. В параллелограмме $ABCD$ сторона AD равна 10. Биссектриса угла A пересекает прямую CD в точке L так, что CL = 6. Найти периметр параллелограмма.

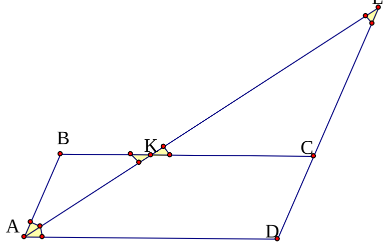
Ответ: 28 или 52



Пусть AL пересекает прямую BC в точке K. Тогда $\angle DAL=\angle BAL=\angle ALD$, и ΔADL равнобедренный $(AD=DL=10)$

Если точка K лежит на продолжении стороны BC, то CD = DL + LC = 16, а периметр параллелограмма 52.

Если точка K лежит на самой стороне BC, то CD = DL – LC = 4, а периметр 28.



(Максимальная оценка за правильное решение задачи 6 баллов)

М5. Ученик должен был перемножить два трёхзначных числа и разделить их произведение на пятизначное число. Однако он не заметил знака умножения и принял два записанных рядом трёхзначных числа за одно шестизначное число. Поэтому полученное частное (натуральное) оказалось в три раза больше истинного. Найти эти два трёхзначных числа.

Ответ: 167 и 334

Обозначим трёхзначные числа a и b, а пятизначное число – c. Тогда по условию $\frac{1000a+b}{c}=3\frac{ab}{c}$, или $1000a+b=3ab$. Так как правая часть равенства делится на a, то и его левая часть также делится на a. Следовательно, $b=ka$, где k – целое число, не превосходящее 9 (т.к. a и b трёхзначные числа). Получаем $1000a+ka=3ka^2$, или $1000+k=3ka$. Левая часть – четырёхзначное число, которое делится на 3, а k – последняя цифра этого числа. Это может быть только 2, 5 или 8, чтобы сумма цифр делилась на 3.

Если $k=2$, то $a=\frac{1002}{6}=167$, а $b=334$. Если $k=5$ или $k=8$, то a получается двузначным числом, что противоречит условию.

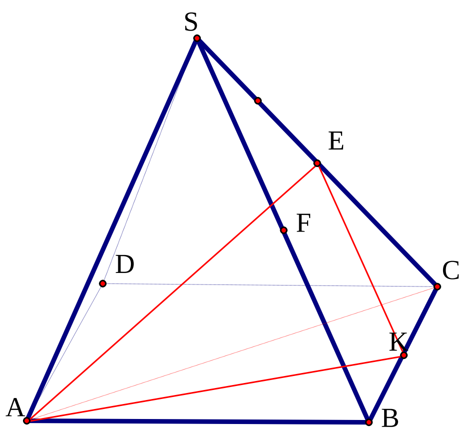
МС1. Решить уравнение: $2|\sin x|+\log_{tgx}\left(-\frac{|\cos x|}{\sin x}\right)=0$.

Ответ: $x=-\frac{5}{6}\pi+2\pi n$, где $n\in\mathbb{Z}$.

В силу ОДЗ $\sin x<0$ и $\cos x<0$. Тогда, раскрыв знаки модуля, получим уравнение: $-2\sin x+\log_{\frac{\sin x}{\cos x}}\frac{\cos x}{\sin x}=0$. Отсюда $\sin x=-\frac{1}{2}$. С учётом ОДЗ получаем ответ.

МС2. В правильной четырёхугольной пирамиде *SABCD*, все рёбра которой равны 1, точки *F* и *E* – середины рёбер соответственно *SB* и *SC*. Найти угол между прямыми *AE* и *BF*.

Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{5}}{10}$



Угол между двумя скрещивающимися прямыми – это угол между пересекающимися прямыми, параллельными данным. Проведём прямую $EK\parallel BF$ в плоскости (BCS). Тогда искомый угол между прямыми AE и BF будет $\angle AEK$.

Рассмотрим ΔAEK и найдём длины его сторон. $EK=\frac{1}{2}$, т.к. это средняя линия ΔSBC. $\angle ASC=90^0$, поскольку $AS=SC=1, AC=\sqrt{2}$. $AE=\sqrt{AS^2+SE^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$ Аналогично, $AK=\frac{\sqrt{5}}{2}$. Таким образом, искомый $\angle AEK$ - это угол при основании равнобедренного треугольника.

$\cos\angle AEK=\frac{KE}{2\cdot AK}=\frac{1}{4\cdot\sqrt{5}/2}=\frac{\sqrt{5}}{10}$.

МС3. Решите систему неравенств $\begin{cases}\log_{5x}x^2+\log_{x^2}5x\le 2\\ \log^4_{x-3}(x^2-17)+\log^2_{x^2-17}(x-3)-\log_{5x}25>79\end{cases}$.

Ответ: 5

Логарифм $\log_{5x} x^2$ имеет такой же знак, как и выражение $(5x-1)(x^2-1)$. На области допустимых значений второго неравенства это выражение положительно. Таким образом, в левой части первого неравенства сумма двух взаимообратных положительных чисел, которая всегда больше 2 или равна двум, если каждое их слагаемых равно 1. Отсюда заключаем, что $\log_{5x} x^2 = 1$, т.е. $x^2 = 5x$. В силу ОДЗ $x \neq 0$, следовательно $x = 5$. Первому неравенству удовлетворяет единственное значение *x*. Подставив это значение во второе неравенство, убедимся, что оно также выполняется при $x = 5$.

МС4. Диагонали *AC* и *BD* трапеции *ABCD* пересекаются в точке *E* и делятся в этой точке в отношении 1:3. Найти площадь трапеции, если площадь треугольника *AED* равна 9.

Ответ: 16 или 48, или 144

1. Обозначим сначала вершины трапеции так, как указано на рисунке 1. Тогда *AED* – максимальный из четырёх треугольников, на которые трапеция разбивается диагоналями.

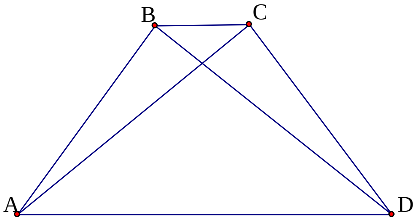


рис. 1

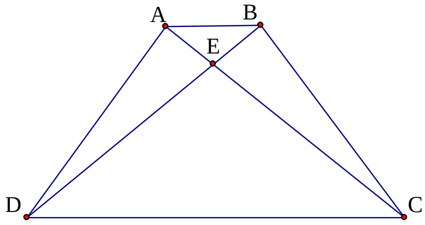


рис. 2

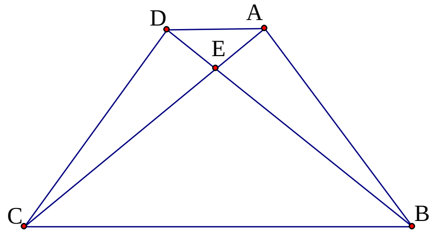


рис. 3

У ΔADE и ΔABE равные высоты, следовательно их площади относятся также, как их основания.

$\dfrac{S(\Delta ABE)}{S(\Delta ADE)} = \dfrac{BE}{DE} = \dfrac{1}{3}$. Отсюда следует, что $S(\Delta ABE) = 3$. Аналогично $S(\Delta DCE) = 3$.

$\dfrac{S(\Delta BCE)}{S(\Delta DCE)} = \dfrac{BE}{DE} = \dfrac{1}{3}$. Отсюда следует, что $S(\Delta BCE) = 1$, а площадь трапеции 9 + 1 +3 + 3 = 16.

2. Если обозначить вершины так, как указано на рисунке 2, то $S(\Delta DEC) = 3 \cdot S(\Delta ADE) = 27$, а $S(\Delta ABE) = S(\Delta ADE) : 3 = 3$. Тогда площадь трапеции равна 27 + 3 + 9 + 9 = 48.

3. И, наконец, можно обозначить вершины третьим способом, как указано на рисунке 3. Тогда $S(\Delta CDE) = S(\Delta BAE) = 3 \cdot S(\Delta ADE) = 27$, $S(\Delta BEC) = 3 \cdot S(\Delta CDE) = 3 \cdot 27 = 81$, $S_{трапеции} = 144$.

МС5. При каких значениях параметра *a* уравнение $x - 2 = \sqrt{-2(a+2)x + 2}$ имеет единственное решение?

Ответ: $a \in (-\infty; -1{,}5]$

Записав условие равносильного перехода $x - 2 \geq 0$, возведём в квадрат обе части уравнения.

Получим равносильную систему $\begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 + 2ax + 2 = 0 \end{cases}$. Система имеет единственное решение, если $D = 0$ и при этом вершина параболы, $x_0 = -a \geq 2$ или в случае, когда $D > 0$, но один из корней не удовлетворяет условию равносильного перехода.

1. $D = 4(a^2 - 2) = 0$ при $a = \pm\sqrt{2}$. Тогда $x_0 = \pm\sqrt{2}$ не удовлетворяет условию равносильного перехода.

2. $D > 0$ при $a \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$ для единственности должно выполняться условие $x_1 < 2 < x_2$, т.е. $f(2) = 4a + 6 < 0$. Таким образом, при $a < -1{,}5 (< -\sqrt{2})$ уравнение имеет одно решение. Проверкой убедимся, что при $a = -1{,}5$ у уравнения также одно решение.