М1. Решить уравнение $\sqrt{x-1}+\sqrt{x}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

Решение
ОДЗ: $x\geq 1$. Если $x>1$, то левая часть уравнения больше 1, а правая – меньше. Единственный корень $x=1$.
Ответ: 1

М2. Несколько косцов, работающих с одинаковой производительностью, должны выкосить луг. Начав работу одновременно, они выполнили бы её за 8 часов. Но косцы приступали к работе один за другим через равные промежутки времени, и затем каждый косил до окончания всей работы. За какое время был выкошен луг, если косец, приступивший к работе первым, проработал в семь раз дольше, чем последний?

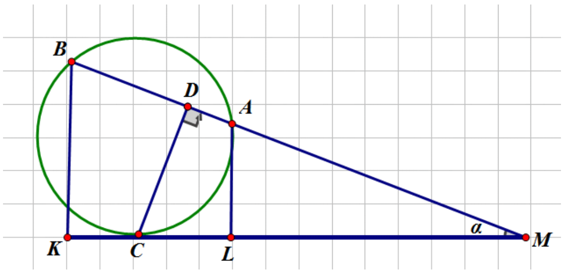
Решение
Обозначим количество рабочих n, производительность каждого из них V, время работы i-го – t_i.

Тогда по условию задачи $\begin{cases} 8nV=1 \\ V(t_1+...+t_n)=1 \\ t_1=7t_n \end{cases}$. Весь луг был выкошен за время t_1.

Время работы косцов составляет арифметическую прогрессию. Её сумма $\dfrac{t_1+t_n}{2}n$. Тогда вся работа $8nV=1=V\dfrac{t_1+t_n}{2}n$, откуда $t_1+t_n=16$, и с учётом 3-го уравнения системы $t_1=14$.

Ответ: за 14 часов

М3. В окружности проведена хорда AB. Расстояния от её концов до касательной, проведённой к этой окружности равны 2 и 4,5. Найти расстояние от точки касания до хорды.



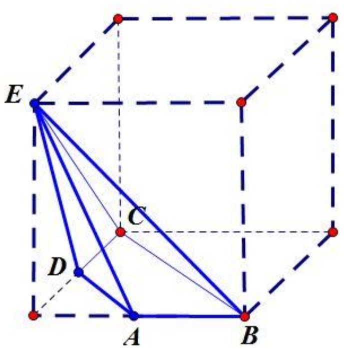
Решение
Продлим хорду AB до пересечения с касательной в точке M. Угол между касательной и секущей обозначим α, а точку касания – C.

По теореме о касательной и секущей, проведённых из одной точки, $MC^2=MA\cdot MB$ (*).

Подставляя в (*) $MC=\dfrac{x}{\sin\alpha}$, $MA=\dfrac{2}{\sin\alpha}$, $MB=\dfrac{4,5}{\sin\alpha}$, получим $x^2=2\cdot 4,5=9$, $x=3$

Ответ: 3

М4. Нарисуйте 4-хугольную пирамиду, у которой две противоположные грани перпендикулярны к плоскости основания. Обоснуйте своё построение.



Решение

Искомую четырёхугольную пирамиду можно «вырезать» из треугольной пирамиды с боковым ребром, перпендикулярным к плоскости основания или из прямоугольного параллелепипеда. Смотри, например, рисунок.

В четырёхугольной пирамиде $ABCDE$ противоположные грани ABE и CDE перпендикулярны плоскости основания, т.к. лежат на боковых гранях куба.

М5. За 5 дней подготовки к Республиканскому многопредметному турниру Мирча решил 31 задачу, причём каждый день он решал больше задач, чем накануне. На пятый день Мирча решил ровно в 3 раза больше задач, чем в первый день подготовки. Сколько задач он решил в 4-й день?

Решение

Обозначим x_i – количество задач, решённых Мирчей в *i*-й день.

Если $x_1 = n$, тогда $x_2 \geq n+1, x_3 \geq n+2, x_4 \geq n+3, x_5 = 3x$. Тогда $x_4 \leq 3x-1$, $x_3 \leq 3x-2$ и т.д.

За 5 дней решено задач $x_1 + x_2 + ... + x_5 = 31$. Сложив 1-ю серию неравенств, получим $31 \geq 7x+6$, откуда $x \leq \frac{25}{7}$. Сложив, вторую серию неравенств, получим $31 \leq 13x-6$, т.е. $x \geq \frac{37}{13}$. Таким образом, $x = 3$. Значит, в 4-й день Мирча решил от $x+3=6$ до $3x-1=8$ задач. Легко проверить, что если в 4-й день решено 6 или 7 задач, то их общее количество меньше 31.

Ответ: 8

М6 *(ЕГЭ-С1)*. Решите уравнение $\log_4\left(4\sin^2 2x\right) = 2 - \log_2\left(-2tgx\right)$

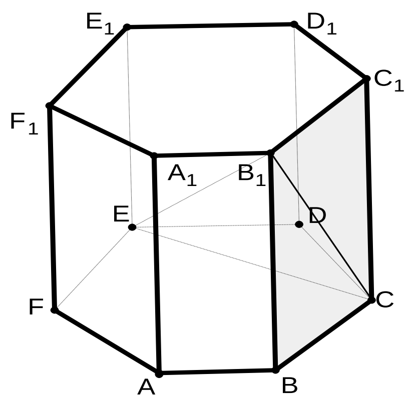
Решение

$\log_2\left|2\sin 2x\right| + \log_2\left(-2tgx\right) = 2$; $\log_2\left(-2 \cdot 2\sin x \cos x\right) + \log_2\left(-2\frac{\sin x}{\cos x}\right) = 2$

$\begin{cases} \log_2\left(8\sin^2 x\right) = \log_2 4 \\ tgx < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \sin x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ tgx < 0 \end{cases}$ $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$;

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$

М7 *(ЕГЭ-С2)*. В правильной шестиугольной призме, $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите: а) угол между прямой B_1E и плоскостью BCC_1



Решение.

В правильном шестиугольнике $EC \perp BC$. Т.к. призма прямая $CC_1 \perp EC$. Следовательно, $EC \perp (BCC_1)$. Значит, угол EB_1C – искомый угол между прямой B_1E и её проекцией B_1C на плоскость BCC_1.

$EC \perp (BCC_1)$, а $B_1C \subseteq (BCC_1)$, следовательно $EC \perp B_1C$, и ΔEB_1C - прямоугольный.

$\sin \angle EB_1C = \frac{EC}{EB_1} = \sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$.

Ответ: $\arcsin\sqrt{\frac{3}{5}}$ (или $\arccos\sqrt{\frac{2}{5}}$, или $\text{arctg}\sqrt{\frac{3}{2}}$)

М8 *(ЕГЭ-С3)*. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{x+4}(x^2+11x+31)+\log_{x^2+11x+31}(x+4)\ge 2 \\ \left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1}\ge\left(\sqrt{5}-2\right)^{\frac{x-1}{x+1}} \end{cases}$$

Решение

1. Обозначим $\log_{x+4}(x^2+11x+31)=y$. Первое неравенство вида $y+\dfrac{1}{y}\ge 2$ выполняется при всех $y>0$, т.е. равносильно неравенству $\log_{x+4}(x^2+11x+31)>0$.

Методом знаков, с учётом ОДЗ, получим систему $\begin{cases} x>-4 \\ (x+3)(x^2+11x+30)>0 \end{cases}$, решение которой $x>-3$ (1).

2. Во втором неравенстве основания показательных функций – взаимно обратные числа. Переходя к одному основанию $\sqrt{5}-2<1$, получим $\left(\sqrt{5}-2\right)^{1-x}\ge\left(\sqrt{5}-2\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$ или $1-x\le\dfrac{x-1}{x+1}$.

Решение этого дробно-рационального неравенства $[-2;-1)\cup[1;\infty)$ находится методом интервалов и является решением всей системы, поскольку удовлетворяет условию (1).

Ответ: $[-2;-1)\cup[1;\infty)$

М9 *(ЕГЭ-С6)*. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\dfrac{x^2-ax+2}{\sqrt{4x-x^2-3}}=0$ имеет единственное решение.

Решение

<u>ОДЗ</u>: $1<x<3$. Обозначим $f(x)=x^2-ax+2$.

Уравнение имеет единственное решение, если квадратный трёхчлен $f(x)$ имеет единственный корень (т.е. $D=0$), и этот корень входит в ОДЗ, или $f(x)$ имеет два корня, но в ОДЗ входит лишь один из них. Запишем эти условия

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} D=0 \\ 1<x_0<3 \end{cases} \\ f(1)f(3)<0 \end{array}\right. \quad\text{или}\quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a^2-8=0 \\ 1<\dfrac{a}{2}<3 \end{cases} \\ (3-a)(11-3a)<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2\sqrt{2} \\ 3<a<\dfrac{11}{3} \end{array}\right..$$

Отдельно необходимо рассмотреть случаи $f(1)=0$ и $f(3)=0$.

$f(1)=0$, при $a=3$. Тогда 2-й корень уравнения $x=2$ входит в ОДЗ.

$f(3)=0$, при $a=\dfrac{11}{3}$. Тогда 2-й корень уравнения $x=\dfrac{2}{3}$ также не входит в ОДЗ, а значит, уравнение не имеет решений.

Ответ: $\left\{2\sqrt{2}\right\}\cup\left[3;\dfrac{11}{3}\right)$