XI Республиканский многопредметный Турнир молодых соотечественников

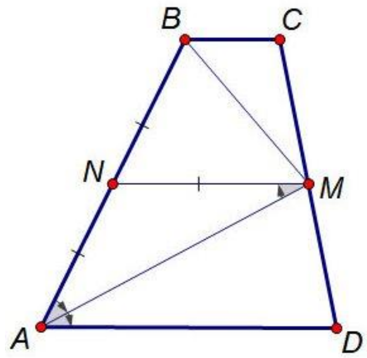
20 апреля 2019 г. **г. Кишинёв**

Математика
11-12 классы

М1. Найдите разность арифметической прогрессии, в которой первый член равен 66, а произведение второго и двенадцатого членов является наименьшим из возможных.

Решение.
По условию $a_1 = 66$. Произведение второго и двенадцатого членов есть квадратичная функция от d:
$a_2 \cdot a_{12} = (a_1 + d)(a_1 + 11d) = (66 + d)(66 + 11d) = 11(d+6)(d+66)$. Корни этой функции «–6» и «–66».
А наименьшее значение она принимает в вершине, которая лежит посередине между корнями в точке $d = -36$.
Ответ: -36

М2. В трапеции *ABCD* с основаниями *BC* и *AD* биссектриса угла *BAD* проходит через середину стороны *CD*, точку *M*. Найдите расстояние от точки *M* до вершины *B*, если расстояние от неё до вершины *A* равно 8, а длина стороны *AB* = 10.



Решение.
Проведём среднюю линию $MN \parallel AD$.
Углы $\angle MAD = \angle NMA$ – внутренние накрест лежащие.
По условию $\angle MAD = \angle MAN$, так как AM – биссектриса.
Значит в ΔANM углы при основании равны и он равнобедренный.
В ΔAMB медиана *MN* равна половине стороны, к которой она проведена.
Значит ΔAMB – прямоугольный (доказать можно методом удвоения медианы). Тогда по теореме Пифагора $BM = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$

Ответ: 6

М3. Решить уравнение $x\sqrt{x} + x(x-1) = 2(x-1)^3$

Решение.
ОДЗ: $x \ge 0$. Уравнение является однородным третьего порядка. Поскольку $x = 1$ не является корнем, можно разделить обе части уравнения на $(x-1)^3$ и сделать замену $t = \dfrac{\sqrt{x}}{(x-1)}$. Получим уравнение $t^3 + t^2 - 2 = 0$. Очевидно, $t = 1$ является корнем. Разделив многочлен третьей степени на $(t-1)$, получим квадратный трёхчлен $t^2 + 2t + 2$, не имеющий корней.

Возвращаясь к переменной *x*, получим уравнение

$$\sqrt{x} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \ge 0 \\ x^2 - 3x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$$

Ответ: $x = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

М4. Том Сойер красил забор длиной 105 м, причем день за днем количество выкрашенного за день уменьшалось на одну и ту же величину. За сколько дней был выкрашен забор, если за первые три дня Том выкрасил 36 м забора, а за последние три дня – 27 м?

Решение.
Количество выкрашенного за день забора уменьшалось на одну и ту же величину, стало быть, мы имеем дело с арифметической прогрессией. По условию:

$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 36 \\ a_{n-2} + a_{n-1} + a_n = 27 \\ S_n = 105 \end{cases}$. Выразим все члены прогрессии и их сумму через a_1 и d:

$$\begin{cases} a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 36 \\ a_1 + d(n-3) + a_1 + d(n-2) + a_1 + d(n-1) = 27 \\ \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n = 105 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + d = 12 \\ a_1 + dn - 2d = 9 \\ \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n = 105 \end{cases}$$

Сложив первые уравнения, получим $2a_1 + d(n-1) = 21$ и подставим в 3-е уравнение и найдём $n = 10$.

Ответ: за 10 дней.

М5. Решить систему уравнений $\begin{cases} (2x^2 - 5x - 3)\sqrt{-\cos y} = 0 \\ \sin y = x \end{cases}$

Решение.
Исходная система равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} 2x^2 - 5x - 3 = 0 \\ \cos y \le 0 \\ \sin y = x \end{cases} \quad (1) \qquad \text{и} \qquad \begin{cases} \cos y = 0 \\ \left[\begin{array}{l} \sin y = x = 1 \\ \sin y = x = -1 \end{array}\right. \end{cases} \quad (2)$$

В системе (1) квадратное уравнение имеет корни $x_1 = 3$ и $x_2 = -0,5$.

В силу второго уравнения x не может быть больше 1, поэтому система (1) примет вид:

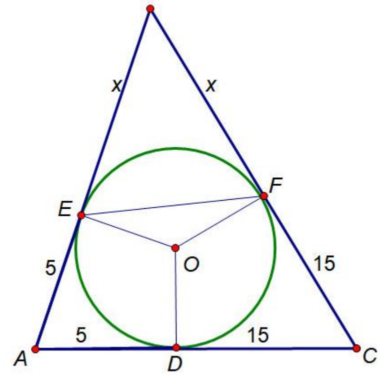
$$\begin{cases} x = -0,5 \\ \sin y = -0,5 \\ \cos y \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n \end{cases}, \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{\left(-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n\right), \left(1; \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right), \left(-1; -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}\right\}$

М6. В треугольник ABC вписана окружность радиуса 5, которая касается сторон треугольника в точках D, E и F. Найдите площадь треугольника BEF, если точка D делит сторону AC на отрезки AD = 5 и DC = 15.

Решение

Проведём радиусы во все точки касания и отметим равные отрезки касательных, выходящих из одной точки. Неизвестные отрезки обозначим через x. У четырёхугольника $AEFD$ все стороны равны 5, а углы $\angle E$ и $\angle D$ – прямые. Значит, $AEFD$ – квадрат, а ΔABC – прямоугольный. По теореме Пифагора $20^2 + (5+x)^2 = (15+x)^2$.



Из этого уравнения $x = 10$. Тогда $\sin\angle B = \dfrac{20}{25} = 0,8$, а площадь треугольника BEF будет равна $\dfrac{1}{2}x^2 \sin\angle B = \dfrac{100 \cdot 0,8}{2} = 40$.

Ответ: 40

M7. Решить неравенство $\log_5^2 \dfrac{(x-4)^2(x-3)}{48} > \log_{0,2}^2 \dfrac{x-3}{3}$.

Решение

ОДЗ: $x>3, x\neq 4$.

Обозначим логарифмируемые выражения соответственно a и b.

Имеем $\log_5^2 a > \log_5^2 b \Leftrightarrow (\log_5 a - \log_5 b)\cdot(\log_5 a + \log_5 b) > 0$ (1)

Методом рационализации переходим от неравенства (1) к равносильному неравенству

$(a-b)\cdot \log_5 ab > 0 \Leftrightarrow (a-b)\cdot(ab-1)>0$.

Возвращаясь к переменной x, получим $\left(\dfrac{(x-4)^2(x-3)}{48}-\dfrac{x-3}{3}\right)\cdot\left(\dfrac{(x-4)^2(x-3)^2}{12^2}-1\right)>0$, Это неравенство после преобразований сводится к следующему $x^2(x-3)(x-7)(x-8)>0$. Методом интервалов, с учётом ОДЗ получаем ответ.

Ответ: $x\in(3;4)\cup(4;7)\cup(8;+\infty)$

M8. Найти все значения a, при которых для всех отрицательных x выполнено неравенство $(x-3)a^2+(2x-1)a-3x-14<0$.

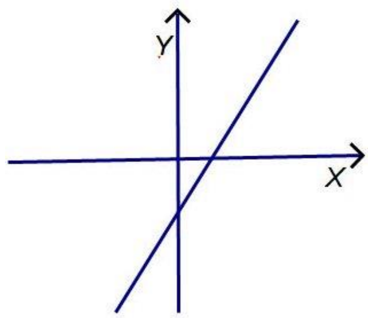
Решение.

Неравенство является линейным относительно x. Перепишем его в виде:

$$(a^2+2a-3)x-3a^2-a-14<0$$

1. Если $a^2+2a-3=0$, тогда $a=-3$ или $a=1$. При $a=1$ неравенство выполняется при всех x, в том числе, и при отрицательных. При $a=-3$ неравенство не выполняется.

2. Если $a^2+2a-3\neq 0$, то линейная функция $f(x)=(a^2+2a-3)x-3a^2-a-14<0$ при всех $x<0$, только если она возрастает и $f(0)<0$ (см. рисунок).



То есть, должны выполняться условия: $\begin{cases} a^2+2a-3>0 \\ -3a^2-a-14\le 0 \end{cases}$,

что равносильно $\begin{cases} a\in(-\infty;-3)\cup(1;+\infty) \\ a\in(-\infty;+\infty) \end{cases}$.

Находим пересечение этих промежутков и добавляем $a=1$, полученное в 1-ом случае.

Ответ: $a\in(-\infty;-3)\cup[1;+\infty)$