XI Республиканский многопредметный Турнир молодых соотечественников

20 апреля 2019 г. **г. Кишинёв**

Математика

9-10 классы

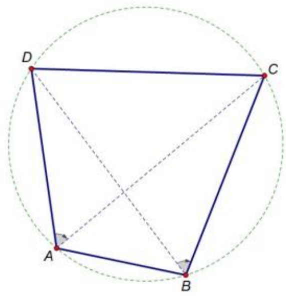
М1. Участники Республиканского многопредметного Турнира возвращались домой, из Кишинёва в Окницу, на автобусе. Автобус ехал со скоростью 80 *км/ч*. Пошёл дождь и водитель снизил скорость до 60 *км/ч*. Когда дождь кончился, автобус вновь поехал с прежней скоростью и приехал в Окницу на 10 минут позже, чем было запланировано. Сколько времени шёл дождь?

Решение.
Пусть x *км* автобус ехал без дождя со скоростью 80 *км/ч* и y *км* – под дождём со скоростью 60 *км/ч*. На весь путь автобус затратил $\frac{x}{80}+\frac{y}{60}=t_1$ часов. Если бы дождя не было, то на всю дорогу ушло бы $\frac{x+y}{80}=t_2$ часов. По условию $t_1-t_2=\frac{1}{6}$ часа. Подставим в это уравнение t_1 и t_2, сократим $\frac{x}{80}$ и найдём $y=40$. Таким образом, под дождём автобус ехал 40 *км* со скоростью 60 *км/ч*. Значит, дождь шёл $\frac{40}{60}=\frac{2}{3}$ часа или 40 минут.

Ответ: 40 минут.

М2. В четырёхугольнике *ABCD* известно, что $\angle CBD=58^0, \angle ABD=44^0, \angle ADC=78^0$. Найдите угол *CAD*.

Решение.
Угол $\angle ABC=102^0$, а угол $\angle ADC=78^0$, сумма двух противоположных углов равна 180^0, значит около четырёхугольника *ABCD* можно описать окружность.
Тогда искомый угол *CAD* опирается на ту же дугу, что и угол *CBD*, а стало быть тоже равен 58^0.



Ответ: 58^0

М3. Решите уравнение $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+2)^2}=\frac{10}{9}$

Решение.

Сделаем замену $y=x+1$ и получим уравнение $\frac{1}{(y-1)^2}+\frac{1}{(y+1)^2}=\frac{10}{9}$.

При условии $y\neq\pm1$ умножим обе части уравнения на общий знаменатель и приведём подобные. Получится биквадратное уравнение $5y^4-19y^2-4=0$, у которого есть два корня $y=\pm2$. Возвращаясь к исходной переменной, находим $x=y-1$

Ответ: $x=-3,\ x=1$.

М4. Мирча и Виорел живут в одном доме, в каждом подъезде которого по 4 квартиры на этаже. Мирча живёт на пятом этаже в квартире 83, а Виорел – на третьем этаже, в 169-й квартире. Сколько этажей в доме?

Решение.

Пусть в доме n этажей, Мирча живёт в $(k+1)$ -ом подъезде, а Виорел – в $(l+1)$ -ом подъезде.

Тогда число квартир в первых k подъездах будет: $4nk = 83-3-4\cdot 4 = 64$, т.е. $nk = 16$.

А число квартир в первых l подъездах будет: $4nl = 169-1-2\cdot 4 = 160$, т.е. $nl = 40$.

Т.е. и 16 и 40 делится на n, а поскольку в силу условия $n \geq 5$, то $n = 8$.

Ответ: в доме 8 этажей.

М5. При каких значениях a уравнения $x^3 + ax + 1 = 0$ и $x^4 + ax^2 + 1 = 0$ имеют хотя бы один общий корень?

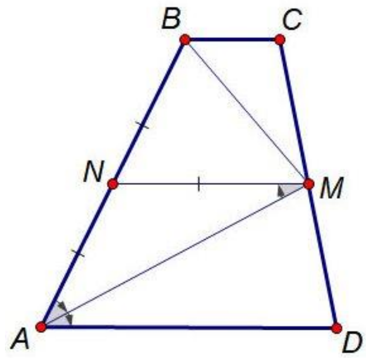
Решение.

Пусть x_0 – корень обоих уравнений. Очевидно, $x_0 \neq 0$. Поэтому можно умножить первое уравнение на x_0 и вычесть из второго. Получим $x_0 = 1$. Таким образом, если уравнения имеют общий корень, то это «1». Подставим $x = 1$ в любое из уравнений и найдём $a = -2$. То есть для того, чтобы число 1 являлось общим корнем данных уравнений необходимо, чтобы $a = -2$. Достаточность проверяем подстановкой $a = -2$ и $x = 1$ в другое уравнение.

Ответ: $a = -2$.

М6. В трапеции *ABCD* с основаниями *BC* и *AD* биссектриса угла *BAD* проходит через середину стороны *CD*, точку *M*. Найдите расстояние от точки *M* до вершины *B*, если расстояние от неё до вершины *A* равно 8, а длина стороны *AB* = 10.

Решение.



Проведём среднюю линию $MN \parallel AD$.

Углы $\angle MAD = \angle NMA$ – внутренние накрест лежащие.

По условию $\angle MAD = \angle MAN$, так как *AM* – биссектриса.

Значит в ΔANM углы при основании равны и он равнобедренный.

В ΔAMB медиана *MN* равна половине стороны, к которой она проведена.

Значит ΔAMB – прямоугольный (доказать можно методом удвоения медианы). Тогда по теореме Пифагора $BM = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$

Ответ: 6

М7. Упростите следующее выражение:

$$\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}\cdot\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}+\sqrt[3]{x\sqrt{x}-9x+27\sqrt{x}-27}}{\sqrt{x}-1-\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}}$$

Решение.

Заметим, что $7 \pm 4\sqrt{3} = \left(2 \pm \sqrt{3}\right)^2$, а $x\sqrt{x} - 9x + 27\sqrt{x} - 27 = \left(\sqrt{x} - 3\right)^3$

Вынесем полный куб из-под корня кубического, а корень четвёртой степени из полного квадрата упростится до корня квадратного.

В результате получим:

$$\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-1-\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{1+\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-1-1} = 1$$

Ответ: 1

М8. Найти все значения a, при которых для всех отрицательных x выполнено неравенство

$$(x+3)a^2+(2x-1)a-3x-14<0.$$

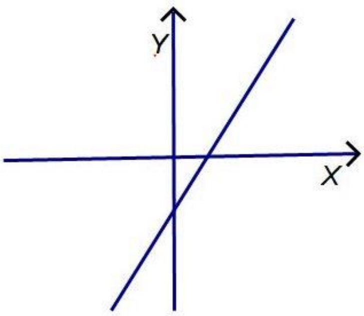
Решение.

Неравенство является линейным относительно x. Перепишем его в виде:

$$(a^2+2a-3)x+3a^2-a-14<0$$

1. Если $a^2+2a-3=0$, тогда $a=-3$ или $a=1$. При $a=1$ неравенство выполняется при всех x, в том числе, и при отрицательных. При $a=-3$ неравенство не выполняется.

2. Если $a^2+2a-3\neq 0$, то линейная функция $f(x)=(a^2+2a-3)x+3a^2-a-14<0$ при всех $x<0$, только если она возрастает и $f(0)<0$ (см. рисунок).



То есть, должны выполняться условия: $\begin{cases} a^2+2a-3>0 \\ 3a^2-a-14\le 0 \end{cases}$,

что равносильно $\begin{cases} a\in(-\infty;-3)\bigcup(1;+\infty) \\ a\in\left[-2;\dfrac{7}{3}\right] \end{cases}$.

Находим пересечение этих промежутков и добавляем $a=1$, полученное в 1-ом случае.

Ответ: $a\in\left[1;\dfrac{7}{3}\right]$