М1. Шестизначное число начинается с цифры 2. Если эту цифру переставить в конец числа, то получится число в 3 раза больше первоначального. Найти эти числа.

Решение

$2\underbrace{*****}_{x}\cdot 3=10\underbrace{*****}_{x}2$, или $(20000+x)\cdot 3=10x+2$

Раскрываем скобки и приводим подобные $7x=599998 \Rightarrow x=85714$

Ответ: 285714

М2. Найдите нули функции $y=\ln^2\left(x^2-3x-9\right)+\sqrt{x^3-8x-8}$.

Решение. $\ln^2\left(x^2-3x-9\right)\geq 0$ и $\sqrt{x^3-8x-8}\geq 0$, значит, их сумма равна 0, если

$\begin{cases}\ln\left(x^2-3x-9\right)=0,\\ x^3-8x-8=0\end{cases}$. $\ln\left(x^2-3x-9\right)=0 \Leftrightarrow x^2-3x-9=1 \Leftrightarrow x^2-3x-10=0$;

$x_1=-2,\ x_2=5$. Проверка показывает, что корнем второго уравнения является только –2.

Ответ: $x=-2$

М3. В треугольнике ABC угол C равен 90^0, а катет $BC=a$. Медианы треугольника CP и BQ перпендикулярны. Найти медиану BQ.

Решение. Пусть медианы CP и BQ пересекаются в точке O, а длина $BQ=x$. Тогда, по свойству пересекающихся медиан, $BO=\frac{2}{3}x$.

Т.к. $CO-$ высота в прямоугольном ΔBCQ, то катет $BC=a$ есть среднее геометрическое между гипотенузой BQ и проекцией этого катета на гипотенузу BO. Т.е. $a=\sqrt{x\cdot\frac{2}{3}x}$. Отсюда $x=a\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Ответ: $a\sqrt{\frac{3}{2}}$.

М4. Найдите все значения x, которые удовлетворяют неравенству $(2a-1)x^2<(a+1)x+3a$ при любом значении параметра a, из промежутка $(1;2)$.

Решение. Неравенство приводится к виду $(2x^2-x-3)a+(-x^2-x)<0$, в котором левая часть есть **линейная** функция от a с коэффициентами, зависящими от x.

Для отрицательности линейной функции $f(a)$ на промежутке (1; 2) необходимо, чтобы она была отрицательна или равна нулю на концах интервала, т.е. выполнялась система

$$\begin{cases}f(1)\leq 0\\ f(2)\leq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-2x-3\leq 0\\ 3x^2-3x-6\leq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-3)(x+1)\leq 0\\ (x-2)(x+1)\leq 0\end{cases} \Leftrightarrow -1\leq x\leq 2.$$

Функция $f(a)$ не должна обращаться в тождественный ноль, т.е. равняться нулю при обоих значениях $a=1$ и $a=2$ одновременно. Это происходит при $x=-1$.

Таким образом, искомые значения x – это $\begin{cases}-1\leq x\leq 2\\ x\neq -1\end{cases} \Leftrightarrow -1<x\leq 2.$

Ответ: $(-1;2]$.

М5 *(ЕГЭ-С1)*. При каких значениях x и y выполняются условия: $\begin{cases} 3^x + 2\sin y = 0 \\ 4\cos^2 y - 4\cos y - 3 = 0 \end{cases}$

Решение. Сделав замену $t = \cos y$, получим квадратное уравнение, которое на интервале [-1; 1] имеет единственный корень $t = -\frac{1}{2}$. Из первого уравнения следует, что $\sin y < 0$.

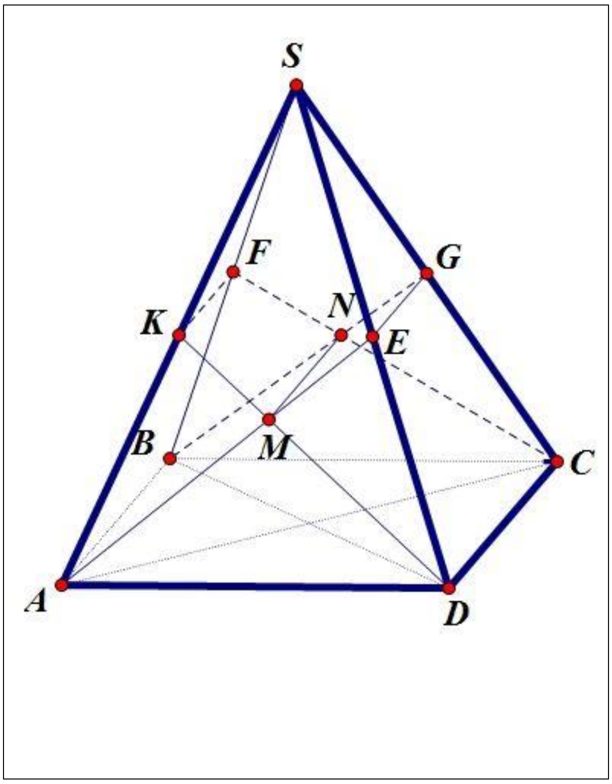
Найдём y, удовлетворяющее условиям $\begin{cases} \cos y = -\frac{1}{2} \\ \sin y < 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}\pi + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Тогда $\sin y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. И из первого уравнения следует, что $3^x = 3^{\frac{1}{2}}$ или $x = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\left\{ \left(\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}\pi + 2\pi n \right) \middle| n \in \mathbb{Z} \right\}$

М6 *(ЕГЭ-С2)*. В правильной четырёхугольной пирамиде *SABCD* все рёбра равны 1. Точка *F* – середина ребра *SB*; точка *G* – середина ребра *SC*. Найти косинус угла между плоскостями *(ABG)* и *(CDF)*.

Решение.



Плоскость *(ABG)* пересекает боковую грань по прямой *EG*, параллельной *AB*, а значит и *DC*.
Значит точка *E* также является серединой ребра *SD*, а *ABGE* – трапеция.
Основания этой трапеции 1 и 0,5, а боковые стороны трапеции $\sqrt{3}/2$.

Высота трапеции *ABGE* $h = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{11}}{4}$.

Аналогично для трапеции *DCFK*.
Поскольку *M* – точка пересечения медиан, $AM = \frac{2}{3}AE$, а высоты трапеций *ABMN* и *DCNM* равны $\frac{2}{3}h = \frac{\sqrt{11}}{6}$.

Обозначив через α угол между плоскостями *(ABG)* и *(CDF)*, запишем теорему косинусов для треугольника, образованного высотами трапеций *ABMN* и *DCNM* и отрезком, параллельным *AD*.

$$1^2 = 2\left(\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^2 (1 - \cos\alpha) \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{7}{11}$$

Угол между плоскостями всегда острый, поэтому его косинус равен $\frac{7}{11}$

Ответ: $\frac{7}{11}$

M7 *(ЕГЭ-С3)*. Решить неравенство $\dfrac{2\log_7(x^2+6x)}{\log_7 x^2} \le 1$.

Решение. Решаем неравенство методом знаков.

$$\frac{2\log_7(x^2+6x)}{\log_7 x^2} \le 1 \Leftrightarrow \frac{2\log_7(x^2+6x)^2 - \log_7 x^2}{\log_7 x^2} \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+6x>0 \\ \dfrac{\left(x^2+6x-x\right)\left(x^2+6x+x\right)}{x^2-1} \le 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty,-6)\cup(0,\infty) \\ \dfrac{\left(x^2+5x\right)\left(x^2+7x\right)}{x^2-1} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty,-6)\cup(0,\infty) \\ x \in [-7,-5]\cup(-1,1) \end{cases}$$

Ответ: $x \in [-7,-6)\cup(0,1)$

M8 *(ЕГЭ-С5)*. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=a$ имеет корни на промежутке [2; 17].

Решение.

Сделаем замену переменной $\sqrt{x-1}=y>0$

Тогда $y^2+1=x$. Подставим в уравнение:

$\sqrt{y^2+4-4y}+\sqrt{y^2+9-6y}=a$

$|y-2|+|y-3|=a \qquad (*)$

$2\le x\le 17 \Leftrightarrow 1\le x-1\le 16$

$1\le y^2\le 16 \Leftrightarrow 1\le |y|\le 4$

Т.к. $y>0$ то $1\le y\le 4$

Таким образом, нужно найти все значения параметра a, при которых уравнение (*) имеет корни на промежутке [1; 4].

Нарисуем график функции $f(y)=|y-2|+|y-3|$.

Точки пересечения этого графика с прямой $y=a$ и есть решения уравнения $f(y)=a$.

Из рисунка видно, что при $a<1$ нет решений.

При $a=1$ решением является целый отрезок $y\in[2,3]$

При $a>1$ уравнение имеет 2 решения.

Они принадлежат отрезку $[1,4]$ при $a\le 3$

Ответ: $1\le a\le 3$.