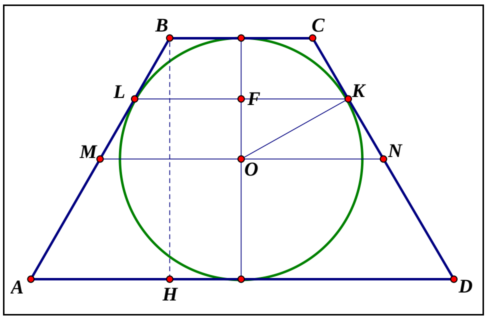
М1. Цифры некоторого трёхзначного числа образуют геометрическую прогрессию. Найдите её знаменатель, если известно, что, поменяв местами цифры сотен и единиц, получим число на 495 больше исходного.

Решение

Обозначим число $\overline{abc}$. Тогда по условию $b^2 = ac$ (1) и $100a+10b+c+495=100c+10b+a$ (2).
Из уравнения (2) находим, что $c=a+5$. Перебор различных значений a приводит нас к выводу, что условие (1) выполняется при a = 4, c = 9, при этом, b = 6. Таким образом, искомое число – 469, а знаменатель прогрессии 3/2.

Ответ: ,5

М2. Окружность радиуса 4 вписана в равнобедренную трапецию, одно из оснований которой равно 4. Найдите: а) второе основание трапеции; б) расстояние между точкам касания этой окружности с боковыми сторонами трапеции.



Решение

а) Обозначим большее основание a, а боковую сторону – c. Так как в трапецию вписана окружность, $a+4=2c$ (1)
Высота трапеции $BH=2r=8$, тогда по теореме Пифагора для ΔABH: $c^2=8^2+\left(\frac{a-4}{2}\right)^2$ (2)
Из уравнений (1) и (2) находим a = 16.

б) Треугольник FKO подобен треугольнику KON. Поэтому $\frac{FK}{OK}=\frac{OK}{ON}$. $OK=4$, $ON=5$. Отсюда $FK=3,2$, а $LK=6,4$

Ответ: а) 16; б) 6,4

М3. Решите уравнение. $\frac{3^{2x}}{100^x}=2(0,3)^x+3$

Решение

Уравнение приводится к виду: $(0,3)^{2x}-2(0,3)^x-3=0$ Один из корней этого квадратного уравнения отрицателен, другой равен 3. Таким образом $(0,3)^x=3$, а $x=\log_{0,3}3$

Ответ: $\log_{0,3}3$

М4. Найдите значение выражения $\frac{\log_5 30}{\log_{150}5}-\frac{\log_5 750}{\log_6 5}$

Решение

Приведём все логарифмы к основанию 5:

$$\log_5 30\cdot\log_5 150-\log_5 6\cdot\log_5 750=(1+\log_5 6)(2+\log_5 6)-\log_5 6\cdot(3+\log_5 6)=2$$

Ответ: 2

М5. Решите неравенство $\sqrt{x^4-2x^2+1}>1-x$

Решение

Вынесем из-под корня полный квадрат: $|x^2-1|>1-x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-1>1-x \\ x^2-1<x-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+x-2>0 \\ x^2-x<0 \end{array}\right.$

Объединив решения двух неравенств, получаем

Ответ: $x\in(-\infty;-2)\cup(0;1)\cup(1:\infty)$

M6. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2\log_x 8 + 3y = 24 \\ -2\log_x^3 0,5 + y = 8 \end{cases}$

Решение

Умножим второе уравнение на 3 и вычтем его из первого уравнения. Получим: $\log_x^3 0,5 + \log_x 2 = 0$, или $\log_x^3 2 = \log_x 2$. Откуда $\left[\begin{array}{l} \log_x 2 = 0 \\ \log_x 2 = 1 \\ \log_x 2 = -1 \end{array}\right.$. Из 2-го и 3-го уравнений находим *x,* а по *x* находим *y*.

Ответ: (2; 6), (0,5; 10)

M7. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = \sin^2 x + \cos x - 0,5$

Решение

Преобразуем функцию к виду: $f(x) = -\cos^2 x + \cos x + 0,5$ и сделаем замену $t = \cos x$.

Достаточно найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(t) = -t^2 + t + 0,5$ на отрезке $[-1;1]$

$f_{\max}(0,5) = 0,75$, $f_{\min}(-1) = -1,5$

M8. Решите уравнение $(\sin 2x - \operatorname{tg} x)\sqrt{2 - x - x^2} = 0$

Решение

Произведение обращается в 0, когда либо $2 - x - x^2 = 0$, т.е $x = -2$ или $x = 1$, либо первый сомножитель равен нулю, а второй не теряет смысла:

$$\begin{cases} \sin 2x - \operatorname{tg} x = 0 \\ 2 - x - x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x(2\cos x - 1/\cos x) = 0 \\ -2 < x < 1 \end{cases}$$

Уравнение $\sin x = 0$ в интервале от –2 до 1 имеет один корень *x* = 0. Второй сомножитель обращается в 0, когда $\cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. В интервале от –2 до 1 лежат корни $\pm\frac{\pi}{4}$

Ответ: $\left\{-2; 0; \pm\frac{\pi}{4}; 1\right\}$

M9. Решите неравенство $\log_3(x+2) > \log_{(x+2)} 81$

Решение

Перейдём к основанию 3 и обозначим $\log_3(x+2) = y$. Получим неравенство $y > \frac{4}{y}$ или $\frac{y^2 - 4}{y} > 0$.

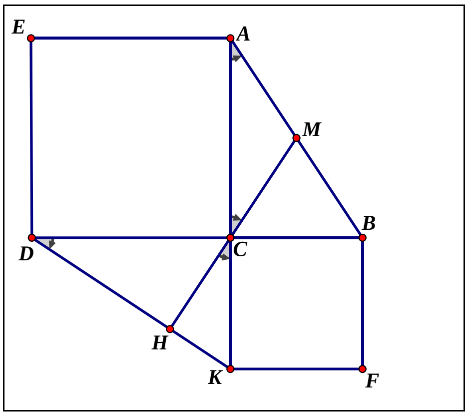
Методом интервалов получим, что $y > 2$ или $-2 < y < 0$. Возвращаясь к замене, найдём *x*.

Ответ: $x \in \left(-1\frac{8}{9}; -1\right) \cup (7; \infty)$

M10. На катетах прямоугольного треугольника *ABC* построены квадраты *ACDE* и *BFKC*. Точка *M* – середина стороны *AB*. Прямые *CM* и *DK* пересекаются в точке *H*.

а) Докажите, что *CM* перпендикулярна *DK*.

б) Найдите *MH*, если катеты треугольника *ABC* равны 30 и 40.



Решение

а) $\Delta ABC = \Delta DCK \Rightarrow \angle BAC = \angle KDC$

Так как треугольник AMC равнобедренный, то $\angle BAC = \angle ACM$.

$\angle ACM = \angle KCH$ – вертикальные.

Таким образом, $\angle KCH = \angle KDC$. Значит в треугольниках KCH и KDC равны и углы $\angle CHK = \angle DCK = 90^0$.

б) Гипотенуза $AB = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50 \Rightarrow CM = 25$.

Высота $CH = \dfrac{30 \cdot 40}{50} = 24$. $MH = 25 + 24 = 49$.

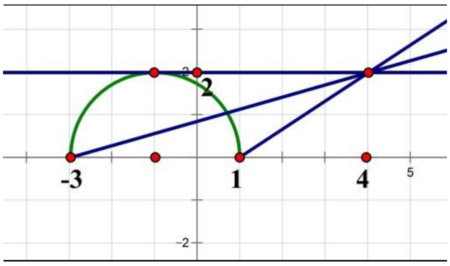
Ответ: 49

М11. При каких значениях параметра *a*, уравнение $ax + \sqrt{3 - 2x - x^2} = 4a + 2$ имеет единственное решение?

Решение

Уединим радикал и выделим под корнем полный квадрат: $\sqrt{4 - (x^2 + 2x + 1)} = 2 - a(x - 4)$.

Сделаем замену $-a = k$, получим $\sqrt{4 - (x+1)^2} = 2 + k(x - 4)$ – слева уравнение полуокружности,



справа – пучок прямых, проходящих через точку (4; 2). Уравнение имеет единственное решение, если прямая проходит горизонтально (т.е. $k = 0$), или если прямая проходит через точку (1; 0) и поворачивается до точки (–3; 0), что соответствует значениям k от $\dfrac{2}{3}$ до $\dfrac{2}{7}$. Тогда $-\dfrac{2}{3} \le a < -\dfrac{2}{7}$.

Ответ: $a \in \left[-\dfrac{2}{3}; -\dfrac{2}{7}\right) \cup \{0\}$