

Математика

М1. Студент Считалкин, работая на заготовке дров, подсчитал, что он выполнил 57 распилов и в результате получил 83 полена. Сколько брёвен было вначале?

Решение. После каждого распила число брёвен изменяется на единицу. Вначале брёвен было $83 - 57 = 26$.

Ответ: 26

М2. В равнобокой трапеции диагонали взаимно перпендикулярны, а средняя линия равна 4. Найти высоту трапеции.

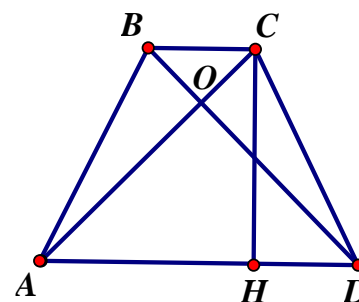
Решение.

Поскольку трапеция $ABCD$ равнобедренная и её ось симметрии проходит через точку пересечения диагоналей, то прямоугольный треугольник AOD также равнобедренный и угол CAH равен 45° . Поэтому $AH = CH = 4$.

Но в равнобедренной трапеции с основаниями a и b

$$AH = a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} \text{ То есть отрезок } AH \text{ равен средней линии.}$$

Ответ: 4



М3. Два спортсмена выбегают одновременно навстречу друг другу из пунктов А и В с постоянными, но не одинаковыми скоростями и встречаются в трехстах метрах от пункта А. Пробежав расстояние между пунктами А и В до конца, спортсмены мгновенно поворачивают обратно и встречаются в четырехстах метрах от пункта В. Найти расстояние между А и В.

Решение. Пусть расстояние между пунктами А и В равно x . тогда
$$\begin{cases} v_1 t_1 = 300 \\ v_2 t_1 = x - 300 \end{cases}$$

Разделим первое уравнение на второе, получим
$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{300}{x - 300} \quad (1.1)$$

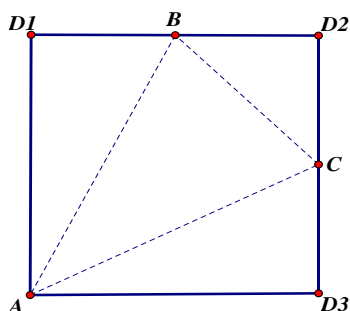
Аналогично из второго условия
$$\begin{cases} v_1 t_2 = x + 400 \\ v_2 t_2 = 2x - 400 \end{cases} \text{ получим } \frac{v_1}{v_2} = \frac{x + 400}{2x - 400} \quad (1.2)$$

Приравнявая (1.1) и (1.2) получим
$$\frac{300}{x - 300} = \frac{x + 400}{2x - 400} .$$

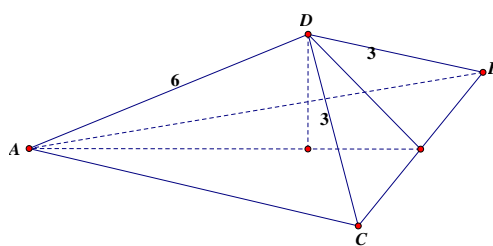
Откуда $600x - 120000 = x^2 + 100x - 120000$ и $x = 500$

Ответ: $x = 500$

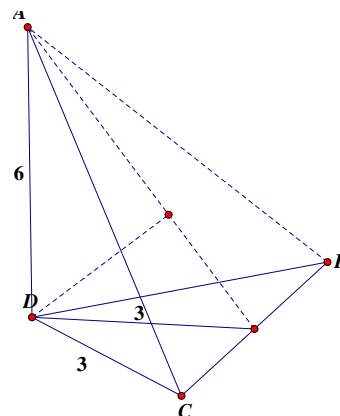
М4. Развёрткой треугольной пирамиды является квадрат, сторона которого равна 6. Вычислить объём этой пирамиды.



Развёртка пирамиды – квадрат 6×6



Все боковые грани пирамиды – прямоугольные треугольники



Решение.

Перевернём пирамиду на боковую грань так, чтобы её основанием стал прямоугольный треугольник, например, с катетами $DC=DB=3$. Тогда высотой пирамиды будет ребро, равное 6.

Объём пирамиды $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot 6 = 9$. **Ответ:** 9

М5. Найти все значения x , которые удовлетворяют неравенству $(2a-1)x^2 < (a+1)x + 3a$ при любом значении параметра a , принадлежащем промежутку $(1; 2)$.

Решение.

$$1. (2a-1)x^2 < (a+1)x + 3a \Leftrightarrow (2x^2 - x - 3)a + (-x^2 - x) < 0.$$

Обозначим $f(a) = (2x^2 - x - 3)a + (-x^2 - x)$. Линейная функция $f(a) < 0$.

2. Неравенство выполнено при всех $1 < a < 2$ тогда и только тогда, когда выполнены два условия:

$$a) \begin{cases} f(1) \leq 0 \\ f(2) \leq 0 \end{cases} \quad (f - \text{на обоих концах меньше или равна нулю})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x^2 - x - 3) \cdot 1 + (-x^2 - x) \leq 0 \\ (2x^2 - x - 3) \cdot 2 + (-x^2 - x) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - x - 3 \leq 0 \\ 3x^2 - 3x - 6 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x+1) \leq 0 \\ (x-2)(x+1) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2.$$

$$б) \begin{cases} f(1) \neq 0 \\ f(2) \neq 0 \end{cases} \quad (f - \text{не обнуляется сразу на обоих концах})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x+1) \neq 0 \\ (x-2)(x+1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq -1.$$

$$3. \begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x \leq 2.$$

Ответ: $-1 < x \leq 2$.

М6. Каждое из чисел 5, 6, 7, 8, 9 умножают на каждое из чисел 12, 13, 14, 15, 16, 17 и перед каждым из полученных произведений произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего все 30 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

Решение.

1. Если все произведения взяты со знаком плюс, то их сумма наибольшая и она равна

$$(5 + \dots + 9)(12 + \dots + 17) = \left(\frac{5+9}{2} \cdot 5 \right) \cdot \left(\frac{12+17}{2} \cdot 6 \right) = 35 \cdot 87 = 3045$$

2. Так как сумма нечетная, число нечетных слагаемых в ней – нечетно, причем это свойство суммы не меняется при изменении знака любого ее слагаемого. Поэтому любая из получающихся сумм будет нечетной, а значит, не будет равна 0.

3. Значение 1 сумма принимает, например, при такой расстановке знаков у произведений, которая получится при раскрытии следующих скобок:

$$(5+6+7-8-9)(12-13-14+15-16+17)=1.$$

Ответ: 1 и 3045.