Номер 1. При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения $x^2 - ax + a + 1 = 0$ минимальна?

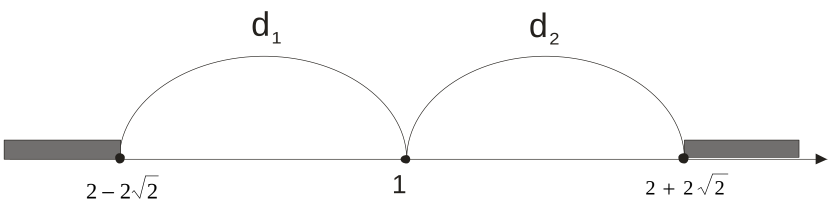
Ответ: $a = 2 - 2\sqrt{2}$

Решение:

Для того, чтобы уравнение имело корни, необходимо, чтобы выполнялось условие $D(a) = a^2 - 4a - 4 \ge 0$. Обозначим $S(a) = x_1^{\,2} + x_2^{\,2}$. Выразим S(a) через коэффициенты квадратного уравнения по т.Виета.

$$S(a) = x_1^{\,2} + x_2^{\,2} = (x_1 + x_2) - 2x_1x_2 = a^2 - 2(a+1) = a^2 - 2a - 2$$

Найдём минимум этой функции при условии $D(a) \ge 0$, т.е. на множестве $\left(-\infty; 2 - 2\sqrt{2}\right] \cup \left[2 + 2\sqrt{2}; \infty\right)$. Минимум функции S(a) достигается при a=1, т.е. когда D<0. Поэтому, наименьшее значение функция S(a) будет достигать на границе области. Проверим, какая из точек $2 + 2\sqrt{2}$ *или* $2 - 2\sqrt{2}$ ближе к 1.



$d_1 = 1 - 2 + 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2} - 1$

$d_2 = 1 + 2\sqrt{2}$

$d_2 > d_1$

Таким образом, минимум функции S(a) достигается при $a = 2 - 2\sqrt{2}$

Номер 2. Можно ли целые числа от 1 до 2004 расставить в таком порядке, чтобы сумма любых 10-ти подряд идущих чисел делилась на 10?

Ответ: невозможно.

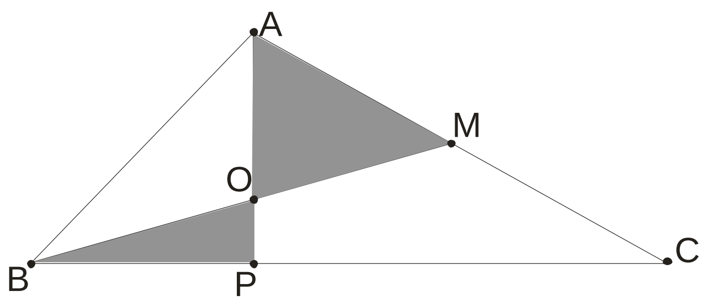
Решение:

Предположим противное, и a_1, a_2, ... , a_{2004} – требуемая расстановка чисел 1,2,…,2004. Поскольку $a_1 + a_2 + ... + a_{10}$ и $a_2 + a_3 + ... + a_{11}$ делятся на 10, разность $(a_1 + a_2 + ... + a_{10}) - (a_2 + a_3 + ... + a_{11}) = a_1 - a_{11}$ также делится на 10, т.е. числа a_1 и a_{11} оканчиваются на одну и ту же цифру. Аналогично, любые два числа, стоящие через 10, оканчиваются на одну и ту же цифру. Итак, если число a_k оканчивается на цифру d, то все числа a_{k-10}, a_{k-20},... также оканчиваются на d. Значит, одно из чисел a_1, a_2,..., a_{10} оканчивается на d. Так как среди чисел *1,2,…, 2004* есть числа, оканчивающиеся на каждую из цифр *0,1,2,…,9*, то для каждой цифры среди чисел a_1, a_2,..., a_{10} есть хотя бы одно (а, значит, ровно одно) число, оканчивающееся на эту цифру. Но тогда последняя цифра числа $a_1 + a_2 + ... + a_{10}$ совпадает с последней цифрой числа $0+1+2+…+9=45$, следовательно, $a_1 + a_2 + ... + a_{10}$ не делится на 10. Противоречие.

Номер 3. В треугольнике ABC сторона $AC = 6,\ AB = 5.$ Медиана BM пересекает биссектрису AP в точке O. Найти отношение площади треугольника BPO к площади треугольника AOM.

Ответ: $\dfrac{33}{25}$

Решение:



AB=5; AC=6; AM=MC=3;

AO–биссектриса ΔBMA поэтому

$$\frac{BO}{OM} = \frac{AB}{AM} = \frac{5}{3}$$

ΔABO и ΔAMO имеют равные высоты, опущенные на сторону BM, поэтому

$$\frac{S_{AOB}}{S_{AOM}} = \frac{BO}{OM} = \frac{5}{3}$$

Обозначим S_{ABC}=S, тогда $S_{ABM} = \dfrac{S}{2}$, т.к. BM–медиана.

$$S_{AOM} = \frac{3}{8} \cdot \frac{S}{2} = \frac{3}{16} S$$

$$S_{ABO} = \frac{5}{8} \cdot \frac{S}{2} = \frac{5}{16} S$$

Аналогично, так как AP–биссектриса ΔABC $\dfrac{S_{ABP}}{S_{APC}} = \dfrac{BP}{PC} = \dfrac{5}{6}$, т.е. $S_{ABP} = \dfrac{5}{11} S$,

тогда $S_{BOP} = S_{ABP} - S_{AOB} = \dfrac{5}{11} S - \dfrac{5}{16} S = \dfrac{25}{11 \cdot 16} S$

Итак: $\dfrac{S_{AOM}}{S_{BOP}} = \dfrac{3 \cdot 11 \cdot 16}{16 \cdot 25} = \dfrac{33}{25}$

Задачи 4, 5 и 6 совпадают с вариантом 10 класса.