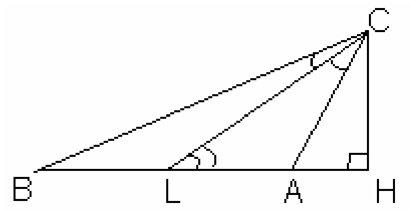
10 класс

1. **Ответ:** $\frac{1}{3}$.

Решение. Так как x ≥ 0, то $\sqrt{x(x+2)+1}=\sqrt{x^2+2x+1}=|x+1|=x+1$. Тогда $\sqrt{(x-3)(x+1)+4}=\sqrt{x^2-2x+1}=|x-1|$. Таким образом, |x – 1| = 2x. Раскрывая модуль на каждом из промежутков [0,1] и (1,+∞), получим, что x = $\frac{1}{3}$.



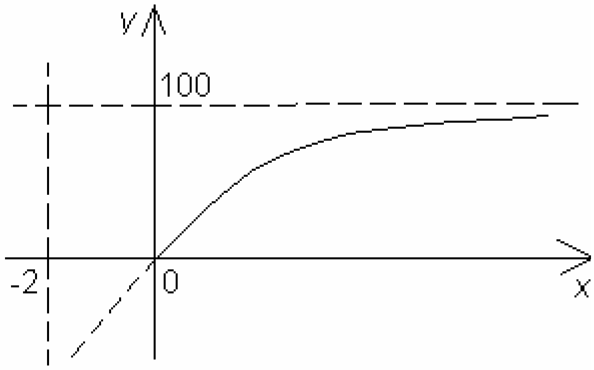
2. **Решение.** Пусть *ABC* – данный треугольник, $\angle B = \alpha$, $\angle A = 120° + \alpha$. Тогда $\angle C = 60° - 2\alpha$. Если *CL* – биссектриса данного треугольника, то $\angle CLA = \angle LCB + \angle LBC = \alpha + (30° - \alpha) = 30°$. Пусть *CH* – высота треугольника *ABC*, тогда в треугольнике *CLH* катет *CH*, лежащий против угла в 30° в два раза меньше, чем гипотенуза *CL*.

3. **Ответ:** первое число больше.

Решение. Рассмотрим разность между данными числами: $\sqrt{2006}+\sqrt{2005+\sqrt{2006}}-\sqrt{2005}-\sqrt{2006+\sqrt{2005}}=\frac{1}{\sqrt{2006}+\sqrt{2005}}-\frac{1+\sqrt{2005}-\sqrt{2006}}{\sqrt{2005+\sqrt{2006}}+\sqrt{2006+\sqrt{2005}}}>0$, так как первая дробь больше второй. Действительно, числитель первой дроби больше числителя второй, а знаменатель – меньше.

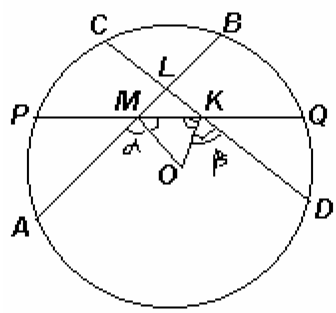
4. **Решение.** Пусть корреспондент прав, и *i*-ый шахматист выиграл n_i партий, и столько же свел вничью. Поскольку он сыграл 19 партий, то остальные $19 - 2n_i$ он проиграл. Так как партия, выигранная одним из участников, является проигранной для другого, то суммарное количество выигранных партий равно суммарному количеству проигранных: $n_1 + n_2 + \ldots + n_{20} = (19 - 2n_1) + (19 - 2n_2) + \ldots + (19 - 2n_{20})$. То есть, $3(n_1 + n_2 + \ldots + n_{20}) = 19\cdot 20$, откуда $n_1 + n_2 + \ldots + n_{20} = \frac{19\cdot 20}{3}$, но это невозможно, так как в левой части равенства стоит целое число, а в правой – не целое.

5. **Решение.** Через промежуток времени *t* часов с момента старта Гриша проедет *x*(*t*) км. Его средняя скорость составит $\frac{x(t)}{t}$ км/ч. Оставшиеся 100 – *x*(*t*) км Гриша, по мнению компьютера, будет двигаться с той же средней скоростью, то есть проедет этот участок за $\frac{100-x(t)}{\frac{x(t)}{t}}$ ч, что по условию всегда составляет 2 ч.



Тогда $\frac{100-x(t)}{\frac{x(t)}{t}}=2$, то есть, $x(t)=\frac{100t}{t+2}$, $t > 0$. Это и есть искомая зависимость.

Для построения графика преобразуем: $\frac{100t}{t+2}=\frac{100(t+2)-200}{t+2}=100-\frac{200}{t+2}$, $t > 0$. Графиком функции $x(t)=100-\frac{200}{t+2}$ является часть гиперболы $x(t)=-\frac{2}{t}$, смещённой влево на 2 и вверх на 100. Приблизительный график зависимости пройденного расстояния от времени приведён на рисунке.



6. **Решение**. Равные хорды стягивают равные дуги, поэтому дуга AB равна дуге PQ, и следовательно дуга AP равна дуге BQ. Таким образом APBQ – вписанная равнобедренная трапеция, а MO – её ось симметрии и биссектриса угла AMQ. То есть $\angle OMA = \angle OMQ = \alpha$. Аналогично, рассматривая симметрию относительно *OK*, получим, что $\angle OKP = \angle OKD = \beta$.

Тогда $\angle KOM = 180° - \alpha - \beta$. $\angle BLD$ - внешний угол треугольника LMK. Поэтому $\angle BLD = \angle LMK + \angle LKM = 180° - 2\alpha + 180° - 2\beta. = 360° - 2(\alpha + \beta) = 2\angle KOM$, что и требовалось доказать.

11 класс

1. Один градус шкалы Цельсия равен 1,8 градусов шкалы Фаренгейта, при этом 0° по Цельсию соответствует 32° по шкале Фаренгейта. Может ли температура выражаться одинаковым числом градусов как по Цельсию, так и по Фаренгейту?

2. Даны квадратные трехчлены f и g с одинаковыми старшими коэффициентами. Известно, что сумма четырех корней этих трехчленов равна p. Найдите сумму корней трехчлена $f + g$, если известно, что он имеет два корня.

3. Дан равносторонний треугольник ABC. Точка K – середина стороны AB, точка M лежит на стороне BC, причем $BM : MC = 1 : 3$. На стороне AC выбрана точка P так, что периметр треугольника PKM – наименьший из возможных. В каком отношении точка P делит сторону AC?

4. Найдите все простые числа p, для которых существует натуральное число m такое, что $\sqrt{m}+\sqrt{m+p}$ – также натуральное число.

5. В выпуклом четырехугольнике суммы синусов противолежащих углов равны. Укажите все четырехугольники, для которых это возможно.

6. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площадь ортогональной проекции грани AA_1B_1B на плоскость, перпендикулярную диагонали AC_1, равна 1. Найдите площадь ортогональной проекции куба на эту плоскость.

11 класс

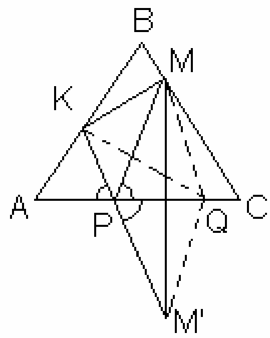
1. **Ответ:** да, может.

Решение. Из условия следует, что температура по Фаренгейту выражается через температуру по Цельсию следующим образом: $T_F = 1{,}8T_C + 32°$. Если $T_F = T_C = x$, то $x = 1{,}8x + 32$, то есть, $x = -40$.

2. **Ответ:** $\frac{p}{2}$.

Решение. Пусть $f(x) = ax^2 + b_1x + c_1$ и x_1, x_2 – его корни, $g(x) = ax^2 + b_2x + c_2$ и x_3, x_4 – его корни. Тогда, по теореме Виета, $x_1 + x_2 = -\frac{b_1}{a}$; $x_3 + x_4 = -\frac{b_2}{a}$. По условию, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b_1+b_2}{a} = p$. Так как $f(x) + g(x) = 2ax^2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)$, то сумма корней этого трехчлена равна: $-\frac{b_1+b_2}{2a} = \frac{p}{2}$.

3. **Ответ:** $AP : PC = 2 : 3$.



Решение. Так как отрезок KM зафиксирован, то периметр треугольника PKM наименьший из возможных тогда и только тогда, когда длина ломаной KPM – наименьшая из возможных. Для того, чтобы построить такую точку P достаточно рассмотреть точку M', симметричную точке M относительно прямой AC. Тогда P – точка пересечения KM' и AC. Действительно, длина ломаной KPM равна $KP + PM = KP + PM' = KM'$. Для любой точки Q отрезка AC, отличной от P, $KQ + QM = KQ + QM' > KM'$.

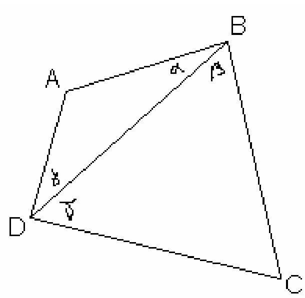
Так как $\angle MPC = \angle M'PC = \angle KPA$, то треугольники MPC и KPA подобны по двум углам. Следовательно, АР : СР = АК : СМ = $\frac{1}{2} : \frac{3}{4} = 2 : 3$.

4. **Ответ:** p – любое нечетное простое число.

Решение. Так как $\sqrt{m}+\sqrt{m+p}=\frac{p}{\sqrt{m+p}-\sqrt{m}}$ – натуральное число и p – натуральное число, то и $\sqrt{m+p}-\sqrt{m}$ – также натуральное число. Следовательно, $\left(\sqrt{m}+\sqrt{m+p}\right)+\left(\sqrt{m+p}-\sqrt{m}\right)=2\sqrt{m+p}$ и $\left(\sqrt{m}+\sqrt{m+p}\right)-\left(\sqrt{m+p}-\sqrt{m}\right)=2\sqrt{m}$ – натуральные числа. Известно, что корень из натурального числа либо извлекается нацело, либо является иррациональным числом, следовательно, $\sqrt{m}$ и $\sqrt{m+p}$ – натуральные числа. Поскольку не существует квадратов натуральных чисел, различающихся на 2, то $p \neq 2$.

В ином случае (если p – нечетное) $p = 2t + 1$, где t – натуральное число. Тогда для $m = t^2$ выполняется условие задачи.

5. **Ответ:** параллелограмм или трапеция.



Решение. Рассмотрим четырехугольник $ABCD$ (см. рисунок). Проведем диагональ BD и введем обозначения $\angle ABD = \alpha$; $\angle CBD = \beta$; $\angle ADB = \gamma$; $\angle CDB = \delta$. Тогда $\angle BAD = 180° - (\alpha + \gamma)$, $\angle ACD = 180° - (\beta + \delta)$.

Тогда, по условию $\sin(\alpha + \gamma) + \sin(\beta + \delta) = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\gamma+\delta)$. Применяя формулу преобразования суммы синусов в произведение, получаем:

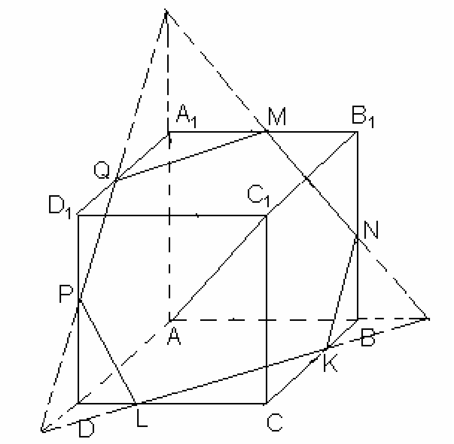
$$2\sin\left(\frac{a+b+g+d}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b+g-d}{2}\right)=2\sin\left(\frac{a+b+g+d}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b-g-d}{2}\right).$$

Разделив обе части равенства на выражение, отличное от нуля, получим: $\cos\left(\frac{a-b+g-d}{2}\right)=\cos\left(\frac{a+b-g-d}{2}\right)$.

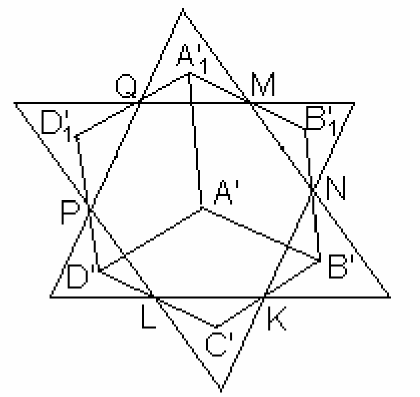
Тогда по формуле разности косинусов $-2\sin\frac{a-d}{2}\sin\frac{g-b}{2}=0$. Следовательно, $\alpha = \delta$ или $\beta = \gamma$, это означает, что хотя бы две стороны данного четырехугольника параллельны.

6. **Ответ:** 3.

Решение. Выберем плоскость проекций, проходящую через центр куба. Сечением куба



этой плоскостью является правильный шестиугольник *MNKLPQ*. Проекцией куба на эту плоскость является шестиугольник $A_1'B_1'B'C'D'D_1'$, вершины которого являются центрами правильных треугольников, построенных на сторонах шестиугольника *MNKLPQ*, поэтому полученный шестиугольник также является правильным, причем вершины A



и C_1 куба проектируются в его центр. Проекцией грани AA_1B_1B является параллелограмм $A'A_1'B_1'B'$. Его площадь в три раза меньше площади проекции куба.

12 класс

1. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^2+4\sin^2 y-4=0 \\ \cos x-2\cos^2 y-1=0 \end{cases}$.

2. В треугольнике *ABC* *BC* = *a*, *AC* = *b* и угол *ACB* в два раза больше угла *BAC*. Найдите длину *AB*.

3. На клетчатой бумаге по линиям сетки нарисован квадрат ABCD со стороной 100 клеток. Рассматриваются ломаные длины 200 с концами в точках A и C. Какое наименьшее количество таких ломаных надо провести, чтобы через каждый узел сетки внутри и на границе этого квадрата проходила хотя бы одна ломаная?

4. Известно, что *f*, *g* и *h* – квадратные трехчлены с положительными старшими коэффициентами. Докажите, что если каждые два из них имеют общий корень, то трехчлен *f* + *g* + *h* имеет корень.

5. В тетраэдре *PABC* высота, опущенная из вершины *P*, проходит через ортоцентр треугольника *ABC*. Найдите отношение площадей граней *PAB* и *PAC*, если *PC* = 6 – $\sqrt{2}$; *PB* = 6 + $\sqrt{2}$; *BC* = 2$\sqrt{19}$.

6. Докажите, что переставив цифры в натуральном числе, являющемся целой степенью двойки (большей, чем третья) нельзя получить число, также являющееся целой степенью двойки.

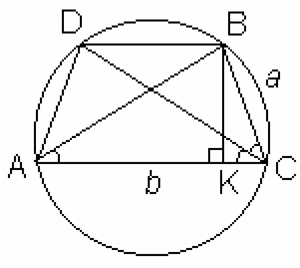
12 класс

Ответ: x = 0, y = $\frac{p}{2}+p\,n$, где $n\in$ Z.

Решение. Запишем второе уравнение в виде cos x = 2cos^{2}y + 1. Тогда левая часть не превосходит единицы, а правая – не меньше единицы. Следовательно, равенство возможно тогда и только тогда, когда cos y= 0 и cos x = 1. Тогда |sin y| = 1, и из первого уравнения следует, что x = 0.

2. **Ответ:** $\sqrt{a(a+b)}$.

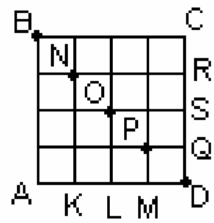
Решение. Рассмотрим окружность, описанную около треугольника *ABC*. Пусть *D* – точка пересечения биссектрисы угла *C* с этой окружностью (см. рисунок). Так как $\angle BCD = \angle ACD = = \angle BAC$, то *BD* = *AD* = *BC* = *a*. Следовательно, *ADBC* – равнобокая трапеция. Пусть *BK* – высота трапеции. Тогда *CK* = $\frac{b-a}{2}$, *AK* = $\frac{b+a}{2}$, $BK^2 = BC^2 - CK^2$, следовательно, $AB^2 = AK^2 + + BC^2 - CK^2 = a^2 + ab$.



Тот же результат можно получить, применив теоремы синусов и косинусов к треугольнику ABC.

3. **Ответ:** 101 ломаная.

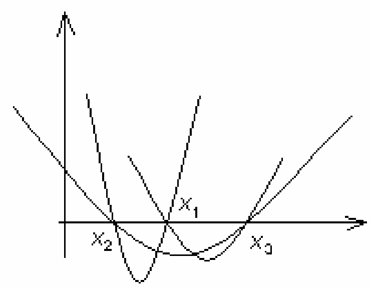
Решение. Рассмотрим узлы сетки, принадлежащие диагонали *BD*. Заметим, что каждая рассматриваемая ломаная проходит только через один из этих узлов. Всего таких узлов 101, следовательно, и ломаных не меньше, чем 101. Пример для 101 ломаной строится аналогично примеру, изображенному на рисунке для квадрата 4×4. Проведены пять ломаных: *ADC*, *AMPQC*, *ALOSC*, *AKNRC* и *ABC*.



4. **Решение.** Возможны два случая:

1) Все три трехчлена имеют общий корень. Тогда утверждение задачи очевидно.

2) Трехчлены f, g и h не имеют общего корня. Пусть x_1, x_2 и x_3 – общие корни этих трехчленов, взятых попарно и $x_2 < x_1 < x_3$ (см. рисунок). Поскольку старшие коэффициенты данных трехчленов положительны, то у графика их суммы найдутся точки, лежащая выше оси Ox. С другой стороны значение суммы этих трехчленов в точке x_1 – отрицательно. Таким образом, f + g + h – непрерывная функция, которая принимает и положительное и отрицательное значение. Следовательно, график этой функции пересекает ось Ox, то есть f + g + h имеет корень.

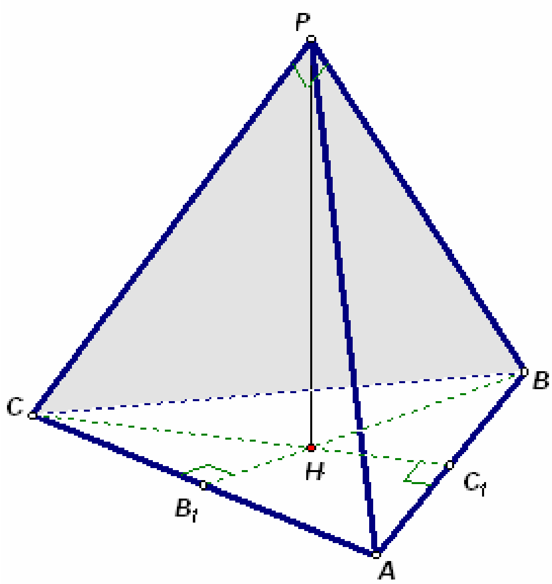


5. **Ответ:** $\frac{S_{PAB}}{S_{PAC}} = \frac{6+\sqrt{2}}{6-\sqrt{2}} = \frac{19+6\sqrt{2}}{17}$.

Решение. Пусть *PABC* – данный тетраэдр, BB_1 и CC_1 – высоты треугольника *ABC*, *H* – ортоцентр этого треугольника (см. рисунок).

Заметим, что $PB^2+PC^2 = \left(6+\sqrt{2}\right)^2+\left(6-\sqrt{2}\right)^2 = 76 = BC^2$, то есть треугольник *PBC* – прямоугольный ($\angle BPC = 90°$ по теореме, обратной теореме Пифагора).

Так как прямая CC_1 является ортогональной проекцией прямой *PC* на плоскость *ABC* и $CC_1 \perp AB$, то $PC \perp AB$ (по теореме о трех перпендикулярах). Кроме того, по доказанному $PC \perp PB$, поэтому $PC \perp APB$ (по признаку перпендикулярности прямой и



плоскости), следовательно, $PC \perp PA$. Аналогично доказывается, что $PA \perp PB$. Таким образом треугольники *PAB* и *PAC* – прямоугольные (с прямыми углами при вершине *P*), тогда $\frac{S_{PAB}}{S_{PAC}} = \frac{PB}{PC}$.

Отметим, что тетраэдр, вершина которого ортогонально проектируется в ортоцентр противолежащей грани, называется ортоцентрическим. У него есть много интересных свойств, в частности, остальные его вершины также проектируются в ортоцентры противолежащих граней. В приведенном решении это свойство было доказано для случая, когда одна из граней тетраэдра – прямоугольный треугольник (ортоцентр прямоугольного треугольника – вершина прямого угла). Полученный тетраэдр является прямоугольным, то есть имеет три плоских прямых угла при одной из вершин. Прямоугольный тетраэдр является частным случаем ортоцентрического.

6. **Решение.** Предположим, что найдется такая степень двойки 2^n, переставив цифры в которой мы получили другую степень двойки 2^k (без ограничения общности можно считать, что $n > k > 3$). Поскольку натуральное число имеет такой же остаток при делении на 9, как и сумма его цифр, то 2^n и 2^k имеют одинаковые остатки при делении на 9. Следовательно, $2^n - 2^k = 2^k(2^{n-k} - 1)$ делится на 9.

Перебором убеждаемся в том, что наименьшая степень двойки, дающая остаток 1 при делении на 9 – это 6. Следовательно, $n - k \geq 6$. Тогда $2^{n-k} - 1 \geq 63$, то есть, $2^n - 2^k \geq 2^k \cdot 63$, откуда $2^n \geq 2^k \cdot 64$. Но числа 2^n и 2^k имеют одинаковое количество разрядов. Получено противоречие.

9 класс

1. Решите уравнение $x+\frac{x}{x}+\frac{x}{x+\frac{x}{x}}=1$.

2. Боковая сторона трапеции равна одному из оснований и вдвое меньше другого. Докажите, что другая боковая сторона перпендикулярна одной из диагоналей трапеции.

3. Маша задумала натуральное число и нашла его остатки при делении на 3, 6 и 9. Сумма этих остатков оказалась равна 15. Найдите остаток от деления задуманного числа на 18.

4. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1 и CC_1. M и K – основания перпендикуляров, опущенных из точки B на прямые AA_1 и CC_1. Докажите, что $MK \parallel AC$.

5. На вопрос о возрасте его детей математик ответил: “У нас с женой трое детей. Когда родился наш первенец, суммарный возраст членов семьи был равен 45 годам, год назад, когда родился третий ребёнок – 70 лет, а в этом году суммарный возраст детей – 14 лет”. Сколько лет каждому ребенку?

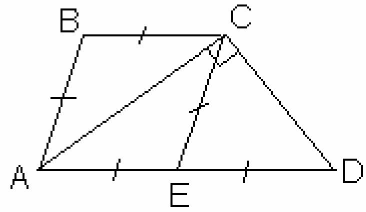
6. Двое играют на доске 4×4 по следующим правилам. Каждый своим ходом закрашивает одну клетку, причем каждая клетка может быть закрашена только один раз. Проигрывает тот, после чьего хода образуется полностью закрашенный квадрат 2×2. Кто выиграет: начинающий или его партнер и как нужно играть, чтобы выиграть?

9 класс

1. **Ответ:** –2.

Решение. На области определения уравнение можно привести к виду $x+1+\frac{x}{x+1}=1$. Умножим обе части уравнения на x + 1. После упрощения получим: $x^2 + 2x = 0$, то есть, $x = 0$ или $x = -2$. Корнем уравнения является только $x = -2$.

2. **Решение**. Пусть $ABCD$ – трапеция, $AB = BC = \frac{1}{2}AD$. Рассмотрим точку E – середину AD (см. рисунок). Тогда $ABCE$ – параллелограмм, так как AE и BC равны и параллельны. Поэтому $EC = AB = \frac{1}{2}AD$. Следовательно, в треугольнике ACD медиана CE равна половине стороны AD, к которой она проведена. Поэтому $\angle ACD = 90°$.

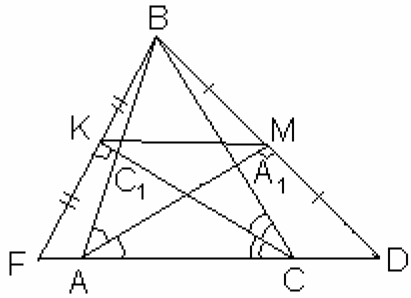


3. **Ответ:** 17.

Решение. Остаток при делении числа на 3 не превосходит 2, при делении на 6 – не превосходит 5, при делении на 9 – не превосходит 8. Поэтому единственным случаем, когда сумма этих остатков равна 15 = 2 + 5 + 8, является тот, в котором эти остатки равны соответственно 2, 5 и 8.

Так как задуманное число дает остаток 8 при делении на 9, то при делении на 18 оно может давать остаток 8 или остаток 17. В первом случае остаток при делении на 6 равен 2, что противоречит условию. Убедимся, что во втором случае условие выполняется: действительно, если остаток при делении на 18 равен 17, то остатки при делении на 3, 6 и 9 равны соответственно 2, 5 и 8.

4. **Решение.** Продолжим BM и BK до пересечения с AC в точках D и F соответственно (см. рисунок). Так как AM – биссектриса и высота треугольника ABD, то этот треугольник – равнобедренный. Следовательно, M – середина DB. Аналогично, K – середина BF. Следовательно, MK – средняя линия треугольника BDF, поэтому $MK \parallel DF$, то есть $MK \parallel AC$.

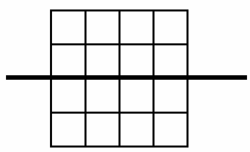


5. **Ответ:** 8 лет, 5 лет, 1 год.

Решение. Из условия задачи следует, что третьему ребенку 1 год. Пусть год назад первому и второму ребенку было x и y лет соответственно. В это же время суммарный возраст родителей был равен 45 + 2x. По условию, суммарный возраст семьи в это время равняется 70 годам, следовательно, $70 - 45 = 3x + y$. В этом году суммарный возраст детей – 14 лет, поэтому $(x + 1) + (y + 1) + 1 = 14$. Решая систему уравнений, получим $x = 7$, $y = 4$. Следовательно, первому ребенку сейчас 8 лет, второму – 5 лет.

6. **Ответ:** выиграет второй игрок.

Решение. Покажем, как следует играть второму игроку, чтобы выиграть, независимо от ходов первого. Мысленно разделим квадрат на два прямоугольника 2×4 (см. рисунок).



Каждым ходом первый игрок закрашивает одну из клеток в одном из этих прямоугольников. Второй закрашивает аналогичную клетку в другом прямоугольнике (параллельный перенос по вертикали на 2). До тех пор, пока первый может сделать непроигрышный ход, его может сделать и второй игрок. Тогда в какой-то момент ход первого будет проигрывающим.