11 класс

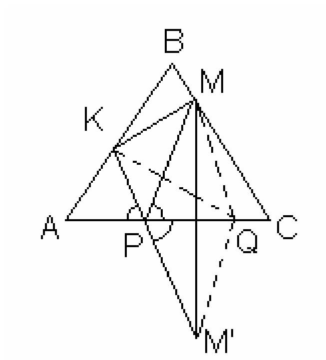
1. **Ответ:** да, может.

Решение. Из условия следует, что температура по Фаренгейту выражается через температуру по Цельсию следующим образом: $T_F = 1{,}8T_C + 32°$. Если $T_F = T_C = x$, то $x = 1{,}8x + 32$, то есть, $x = – 40$.

2. **Ответ:** $\frac{p}{2}$.

Решение. Пусть $f(x) = ax^2 + b_1x + c_1$ и x_1, x_2 – его корни, $g(x) = ax^2 + b_2x + c_2$ и x_3, x_4 – его корни. Тогда, по теореме Виета, $x_1 + x_2 = -\frac{b_1}{a}$; $x_3 + x_4 = -\frac{b_2}{a}$. По условию, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b_1+b_2}{a} = p$. Так как $f(x) + g(x) = 2ax^2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)$, то сумма корней этого трехчлена равна: $-\frac{b_1+b_2}{2a}=\frac{p}{2}$.

3. **Ответ:** $AP : PC = 2 : 3$.



Решение. Так как отрезок KM зафиксирован, то периметр треугольника PKM наименьший из возможных тогда и только тогда, когда длина ломаной KPM – наименьшая из возможных. Для того, чтобы построить такую точку P достаточно рассмотреть точку M', симметричную точке M относительно прямой AC. Тогда P – точка пересечения KM' и AC. Действительно, длина ломаной KPM равна $KP + PM = KP + PM' = KM'$. Для любой точки Q отрезка AC, отличной от P, $KQ + QM = KQ + QM' > KM'$.

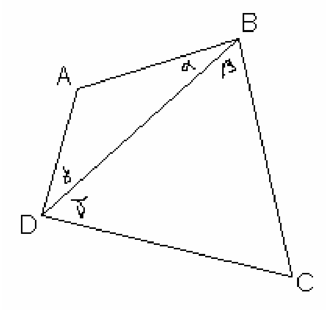
Так как $\angle MPC = \angle M'PC = \angle KPA$, то треугольники MPC и KPA подобны по двум углам. Следовательно, AP : CP = AK : CM = $\frac{1}{2} : \frac{3}{4}$ = 2 : 3.

4. **Ответ:** p – любое нечетное простое число.

Решение. Так как $\sqrt{m}+\sqrt{m+p}=\frac{p}{\sqrt{m+p}-\sqrt{m}}$ – натуральное число и p – натуральное число, то и $\sqrt{m+p}-\sqrt{m}$ – также натуральное число. Следовательно, $\left(\sqrt{m}+\sqrt{m+p}\right)+\left(\sqrt{m+p}-\sqrt{m}\right)=2\sqrt{m+p}$ и $\left(\sqrt{m}+\sqrt{m+p}\right)-\left(\sqrt{m+p}-\sqrt{m}\right)=2\sqrt{m}$ – натуральные числа. Известно, что корень из натурального числа либо извлекается нацело, либо является иррациональным числом, следовательно, $\sqrt{m}$ и $\sqrt{m+p}$ – натуральные числа. Поскольку не существует квадратов натуральных чисел, различающихся на 2, то $p \neq 2$.

В ином случае (если p – нечетное) $p = 2t + 1$, где t – натуральное число. Тогда для $m = t^2$ выполняется условие задачи.

5. **Ответ:** параллелограмм или трапеция.



Решение. Рассмотрим четырехугольник $ABCD$ (см. рисунок). Проведем диагональ BD и введем обозначения $\angle ABD = \alpha$; $\angle CBD = \beta$; $\angle ADB = \gamma$; $\angle CDB = \delta$. Тогда $\angle BAD = 180° – (\alpha + \gamma)$, $\angle ACD = 180° – (\beta + \delta)$.

Тогда, по условию $\sin(\alpha + \gamma) + \sin(\beta + \delta) = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\gamma+\delta)$. Применяя формулу преобразования суммы синусов в произведение, получаем:

$$2\sin\left(\frac{a+b+g+d}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b+g-d}{2}\right)=2\sin\left(\frac{a+b+g+d}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b-g-d}{2}\right).$$

Разделив обе части равенства на выражение, отличное от нуля, получим: $\cos\left(\dfrac{a-b+g-d}{2}\right)=\cos\left(\dfrac{a+b-g-d}{2}\right)$.

Тогда по формуле разности косинусов $-2\sin\dfrac{a-d}{2}\sin\dfrac{g-b}{2}=0$. Следовательно, $\alpha = \delta$ или $\beta = \gamma$, это означает, что хотя бы две стороны данного четырехугольника параллельны.

6. **Ответ:** 3.

Решение. Выберем плоскость проекций, проходящую через центр куба. Сечением куба этой плоскостью является правильный шестиугольник *MNKLPQ*. Проекцией куба на эту плоскость является шестиугольник $A_1'B_1'B'C'D'D_1'$, вершины которого являются центрами правильных треугольников, построенных на сторонах шестиугольника *MNKLPQ*, поэтому полученный шестиугольник также является правильным, причем вершины A и C_1 куба проектируются в его центр. Проекцией грани AA_1B_1B является параллелограмм $A'A_1'B_1'B'$. Его площадь в три раза меньше площади проекции куба.