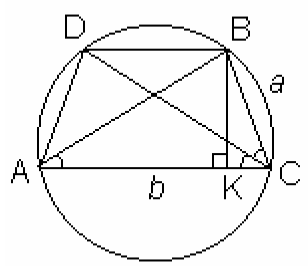
12 класс

Ответ: x = 0, y = $\frac{p}{2}+p\,n$, где $n\in$ Z.

Решение. Запишем второе уравнение в виде cos x = 2cos^{2}y + 1. Тогда левая часть не превосходит единицы, а правая – не меньше единицы. Следовательно, равенство возможно тогда и только тогда, когда cos y= 0 и cos x = 1. Тогда |sin y| = 1, и из первого уравнения следует, что x = 0.

2. **Ответ:** $\sqrt{a(a+b)}$.

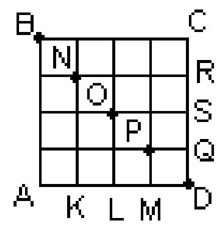
Решение. Рассмотрим окружность, описанную около треугольника *ABC*. Пусть *D* – точка пересечения биссектрисы угла *C* с этой окружностью (см. рисунок). Так как $\angle BCD = \angle ACD = = \angle BAC$, то *BD* = *AD* = *BC* = *a*. Следовательно, *ADBC* – равнобокая трапеция. Пусть *BK* – высота трапеции. Тогда *CK* = $\frac{b-a}{2}$, *AK* = $\frac{b+a}{2}$, $BK^2 = BC^2 - CK^2$, следовательно, $AB^2 = AK^2 + + BC^2 - CK^2 = a^2 + ab$.



Тот же результат можно получить, применив теоремы синусов и косинусов к треугольнику ABC.

3. **Ответ:** 101 ломаная.

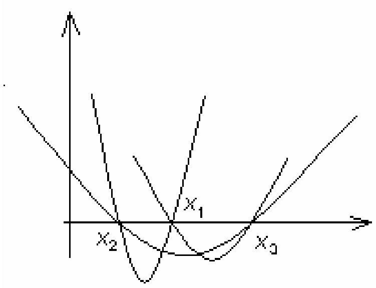
Решение. Рассмотрим узлы сетки, принадлежащие диагонали *BD*. Заметим, что каждая рассматриваемая ломаная проходит только через один из этих узлов. Всего таких узлов 101, следовательно, и ломаных не меньше, чем 101. Пример для 101 ломаной строится аналогично примеру, изображенному на рисунке для квадрата 4×4. Проведены пять ломаных: *ADC*, *AMPQC*, *ALOSC*, *AKNRC* и *ABC*.



4. **Решение.** Возможны два случая:

1) Все три трехчлена имеют общий корень. Тогда утверждение задачи очевидно.

2) Трехчлены f, g и h не имеют общего корня. Пусть x_1, x_2 и x_3 – общие корни этих трехчленов, взятых попарно и $x_2 < x_1 < x_3$ (см. рисунок). Поскольку старшие коэффициенты данных трехчленов положительны, то у графика их суммы найдутся точки, лежащая выше оси Ox. С другой стороны значение суммы этих трехчленов в точке x_1 – отрицательно. Таким образом, f + g + h – непрерывная функция, которая принимает и положительное и отрицательное значение. Следовательно, график этой функции пересекает ось Ox, то есть f + g + h имеет корень.

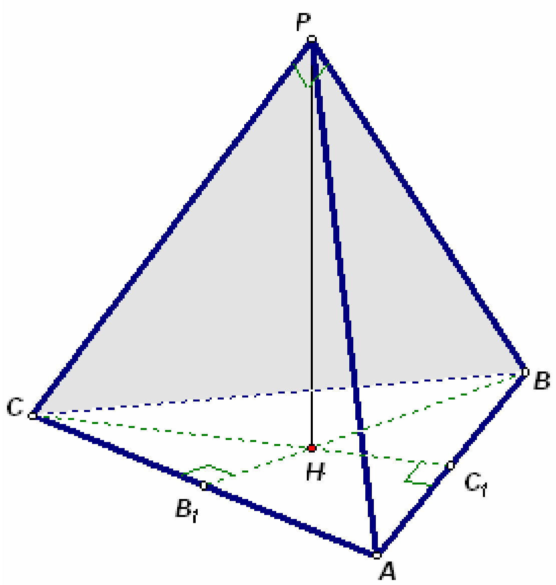


5. **Ответ:** $\frac{S_{PAB}}{S_{PAC}} = \frac{6+\sqrt{2}}{6-\sqrt{2}} = \frac{19+6\sqrt{2}}{17}$.

Решение. Пусть *PABC* – данный тетраэдр, BB_1 и CC_1 – высоты треугольника *ABC*, *H* – ортоцентр этого треугольника (см. рисунок).

Заметим, что PB^2+PC^2 = $\left(6+\sqrt{2}\right)^2+\left(6-\sqrt{2}\right)^2$ = 76 = BC^2, то есть треугольник *PBC* – прямоугольный ($\angle BPC$ = 90° по теореме, обратной теореме Пифагора).

Так как прямая CC_1 является ортогональной проекцией прямой *PC* на плоскость *ABC* и $CC_1 \perp AB$, то $PC \perp AB$ (по теореме о трех перпендикулярах). Кроме того, по доказанному $PC \perp PB$, поэтому $PC \perp APB$ (по признаку перпендикулярности прямой и



плоскости), следовательно, $PC \perp PA$. Аналогично доказывается, что $PA \perp PB$. Таким образом треугольники PAB и PAC – прямоугольные (с прямыми углами при вершине P), тогда $\frac{S_{PAB}}{S_{PAC}} = \frac{PB}{PC}$.

Отметим, что тетраэдр, вершина которого ортогонально проектируется в ортоцентр противолежащей грани, называется ортоцентрическим. У него есть много интересных свойств, в частности, остальные его вершины также проектируются в ортоцентры противолежащих граней. В приведенном решении это свойство было доказано для случая, когда одна из граней тетраэдра – прямоугольный треугольник (ортоцентр прямоугольного треугольника – вершина прямого угла). Полученный тетраэдр является прямоугольным, то есть имеет три плоских прямых угла при одной из вершин. Прямоугольный тетраэдр является частным случаем ортоцентрического.

6. **Решение.** Предположим, что найдется такая степень двойки 2^n, переставив цифры в которой мы получили другую степень двойки 2^k (без ограничения общности можно считать, что $n > k > 3$). Поскольку натуральное число имеет такой же остаток при делении на 9, как и сумма его цифр, то 2^n и 2^k имеют одинаковые остатки при делении на 9. Следовательно, $2^n - 2^k = 2^k(2^{n-k} - 1)$ делится на 9.

Перебором убеждаемся в том, что наименьшая степень двойки, дающая остаток 1 при делении на 9 – это 6. Следовательно, $n - k \geq 6$. Тогда $2^{n-k} - 1 \geq 63$, то есть, $2^n - 2^k \geq 2^k \cdot 63$, откуда $2^n \geq 2^k \cdot 64$. Но числа 2^n и 2^k имеют одинаковое количество разрядов. Получено противоречие.