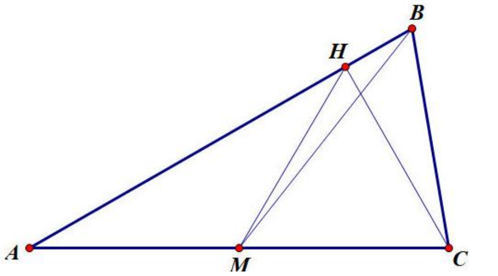
Олимпиада «Будем учиться в России!»

30 апреля 2018 г. **г. Кишинёв**

1. Вычислить, чему равно выражение $\left(\frac{15}{\sqrt{6}+1}+\frac{4}{\sqrt{6}-2}-\frac{12}{3-\sqrt{6}}\right)\cdot\left(\sqrt{6}+11\right)$

Решение
Умножим на «сопряжённое» числитель и знаменатель каждой дроби. Получим
$\left(3(\sqrt{6}-1)+2(\sqrt{6}+2)-4(3+\sqrt{6})\right)\cdot\left(\sqrt{6}+11\right)=\left(\sqrt{6}-11\right)\cdot\left(\sqrt{6}+11\right)=6-121=-115$
Ответ: -115

2. В треугольнике ABC проведена высота CH и медиана BM. Длина отрезка MH, соединяющего их основания, равна 10. Найти длину стороны AC.



Решение
В прямоугольном треугольнике AHC медиана, проведённая на гипотенузу, $HM = 10$ и равна половине гипотенузы. Гипотенуза $AC = 20$.
Ответ: 20

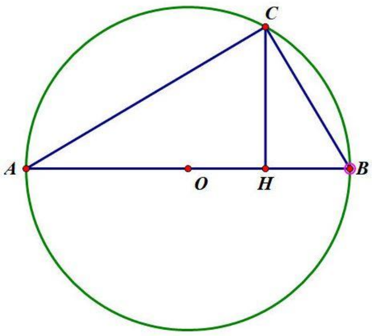
3. Длина войсковой колонны составляет 5 км. Связной выехал из арьергарда колонны в её начало, передал пакет и вернулся обратно.
Какой путь проехал связной, если колонна за это время прошла 12 км?

Решение
Обозначим скорость связного V_C, скорость колонны – V_K. Тогда из арьергарда колонны в её начало связной доезжает за время $\frac{5}{V_C-V_K}$, а обратно за время $\frac{5}{V_C+V_K}$. Колонна за это же время прошла 12 км. Следовательно, $\frac{5}{V_C-V_K}+\frac{5}{V_C+V_K}=\frac{12}{V_K}$.
Приведём все дроби к общему знаменателю. Получим уравнение $6{V_K}^2+5V_KV_C-6{V_C}^2=0$ – однородное второго порядка относительно V_K и V_C. Разделив это уравнение на ${V_C}^2$, получим квадратное уравнение, из которого $\frac{V_K}{V_C}=\frac{2}{3}$.
Обозначим искомый путь, пройденный связным S. Тогда время, за которое он проехал этот путь равно $\frac{S}{V_C}=\frac{12}{V_K}$. Значит, $\frac{S}{12}=\frac{V_C}{V_K}=\frac{3}{2}$. Отсюда $S=18$.
Ответ: 18 км.

4. Решите неравенство $\frac{x^2-7|x|+10}{x^2-6|x|+9}\le 0$

Решение
Обозначим $|x|=t$ и разложим на множители квадратные трёхчлены в числителе и знаменателе дроби. Получим неравенство: $\frac{(t-2)(t-5)}{(t-3)^2}\le 0$.
Решая его методом интервалов, находим $2\le t\le 5,\quad t\ne 3$. Возвращаясь к замене, получим ответ.
Ответ: $x\in[-5;-3)\cup(-3;-2]\cup[2;3)\cup(3;5]$

5. Из точки на окружности опущен перпендикуляр на её радиус. Найти длину этого перпендикуляра, если его основание разделило радиус окружности на отрезки длиной 16 и 18.



Решение

Продлим радиус, на который опущен перпендикуляр, и соединим концы полученного диаметра с точкой C на окружности. Угол ACB – прямой, так как опирается на диаметр, а CH является высотой прямоугольного треугольника.

I случай: $OH = 16$, $HB = 18$

Тогда $AH = 50$ и $CH = \sqrt{AH \cdot BH} = \sqrt{50 \cdot 18} = 30$

II случай: $OH = 18$, $HB = 16$

Тогда $AH = 52$ и $CH = \sqrt{AH \cdot BH} = \sqrt{52 \cdot 16} = 8\sqrt{13}$

Ответ: 30 или $8\sqrt{13}$

6. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{6x-8-x^2}\,(ax^2-3(a+1)x+2a+7)=0$ имеет три различных корня?

.

Решение

Первый сомножитель $\sqrt{6x-8-x^2}=0$ при $x=2$ и $x=4$; и два корня уравнение имеет при любых a.

ОДЗ: $x \in [2;4]$

Найдём значения параметра a, при которых функция $f(x)=ax^2-3(a+1)x+2a+7$ имеет один корень на интервале $(2;4)$.

1) Если $a=0$ $f(x)=-3x+7=0$ при $x=2\frac{1}{3}\in(2;4)$.

2) Если $a\neq 0$, найдём дискриминант $D=9(a+1)^2-4a(2a+7)=a^2-10a+9$. Когда $D=0$ при $a=1$ или $a=9$ у функции $f(x)$ будет один корень. Проверим, входит ли он в ОДЗ. Если $a=1$, корень $x_0=3\in(2;4)$. Если $a=9$, $x_0=1\frac{2}{3}\notin(2;4)$

3) Возможно также, что $f(x)$ имеет два корня, но лишь один принадлежит интервалу $(2;4)$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $f(2)\cdot f(4)<0$, то есть $6a-5<0$.

Ответ: $a\in\left(-\infty;\frac{5}{6}\right)\cup\{1\}$