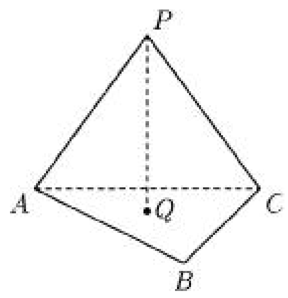
11-12 класс

1. Ответ: 4.

Данный трехчлен имеет один корень, поэтому его дискриминант равен нулю: $a^2 - 4a = 0 \iff a = 0$ или $a = 4$, причем a = 0 решением задачи не является, так как изображенная парабола не является графиком функции $y = x^2$.

2. Ответ: нельзя.



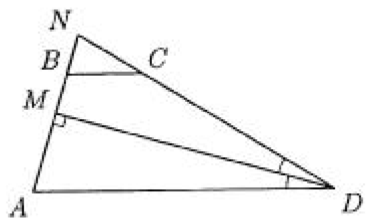
Рассмотрим проекции ребер тетраэдра $PABC$ на прямую, содержащую высоту PQ. Ребра AB, BC и CA проектируются в точку Q,а ребра PA, PB и PC — в отрезок PQ. Таким образом, при проектировании векторов на эту прямую мы бы получили три нулевых вектора и три вектора равной длины, сумма которых равняться нулевому вектору не может. Следовательно, и сумма исходных векторов равняться нулевому вектору также не может.

Отметим, что возможны и другие способы решения, в том числе, основанные на полном, переборе.

3. Ответ: 1.

Заметим, что все члены последовательности, начиная с cos 1000°, равны между собой, так как разность между числам 10^{k+1} и 10^k при натуральных $k \geq 3$ кратна 360. Непосредственной проверкой убеждаемся, что cos 1° > 0, cos 10° > O, cos 100° < 0, cos 1000° = cos(-80°) > 0. Таким образом, среди первых 100 членов последовательности (равно как и среди всех ее членов) отрицательное число только одно.

4. Ответ: $SMBCD : S_{AMD} = 7:8$.



Продолжим боковые стороны трапеции $A\ B\ CD$ до пересечения в точке N (см. рис.). Треугольник AND - равнобедренный, так как DM - его биссектриса, и высота. Следовательно, DM - медиана треугольника AND, значит $BM = BN=(1/4)AN$. Пусть площадь треугольника BNC равна 5. Так как $\Delta BNC \sim \Delta AND$ с коэффициентом $1/4$, то площадь треугольника AND равна $16S$. Тогда площадь треугольника AMD равна $8S$, а площадь четырехугольника $MBCD$ равна $8S - S = 7S$.

5. Ответ: $1/a$

Докажем следующее утверждение: если $a \neq 0$ - корень уравнения $a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0 = 0$, то $1/a$ - корень уравнение $n_0x^n + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$. Действительно, если справедливо равенство $a_n\alpha^n + \cdots + a_1\alpha + a_0 = 0$, то, разделив его почленно на α^n получим верное равенство

$$a_n + ... + \frac{a_1}{a^n - 1} + \frac{a_0}{a^n} = 0$$

Поэтому, если a корень уравнения $x^3 + Ox^2 - 2004x + 1 = 0$, то $a \neq 0$, следовательно, $1/a$ корень уравнения $x^3 - 2004x^2 + 0x + 1 = 0$.

6. Ответ: да, может.

Первый способ. Можно, например, «создать цикл». В этом случае ход игры можно записать следующим образом (ходы Феди подчеркнуты): 1) 123; 2) 225; 3) 327; 4) 429; 5) 531; 6) <u>135</u>; 7) 237; 8) <u>327</u>; и т.д.

Второй способ. Дождемся, пока последняя цифра числа не станет единицей или двойкой. Это произойдет не позже чем через 5 минут. За это время число увеличится не более, чем на $102 \cdot 5 = 510$, то есть останется трехзначным. После этого переставим последнюю цифру на первое место. Получим число, меньшее трехсот, для которого можно повторить описанный алгоритм.

7. Ответ: Да. мог (в обоих случаях).

а) В каждой паре из двух последовательных карт возможны 4 расположения рубашек. Они позволяют закодировать - возможных масти второй из карт. Пусть в последней паре рубашка первой из карт указывает порядок расположения карт (например, является ли первая из них старшей, если масти упорядочены по старшинству). Тогда экстрасенс угадывает масти обеих карт в последней паре и не менее одной - в каждой из остальных пар, т. е. всего не менее 19 раз.

б) Пусть рубашка первой карты определяет, какой цвет преобладает среди следующих трех карт. Если все они одного цвета (скажем, красные), то рубашка первых двух показывает их масть (червы или бубны), а рубашка третьей определяет, какой цвет преобладает в следующей тройке. Если же две карты красные, а одна черная, то рубашка красных показывает их масть, а рубашка черной — преобладающий цвет следующей тройки. В последней тройке (карты с 32-й по 34-ю)вместо цвета следующей тройки указывается последовательность двух оставшихся карт (как в пункте а).) Экстрасенс в каждой из троек считает, что все карты — преобладающего цвета, соответственно называет их масть и в результате угадывает не менее двух раз. Кроме того, он отгадывает масть последних двух карт, т. е. всего не менее 24 раз.

Комментарий: задача дана для 23 карт, т. к. школьник может придумать другое решение, которое проходит для 23, но не проходит для 24.