Олимпиада «Будем учиться в России!»

29 апреля 2017 г. **г. Кишинёв**

1. Вычислите $\left(\frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}+\frac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}+\sqrt{7}\right)\cdot\sqrt{6}$

Умножим на «сопряжённое» числитель и знаменатель каждой дроби. Получим

$\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{3}-2\left(\sqrt{7}-\sqrt{6}\right)+\sqrt{7}\right)\cdot\sqrt{6}=3\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}=18$

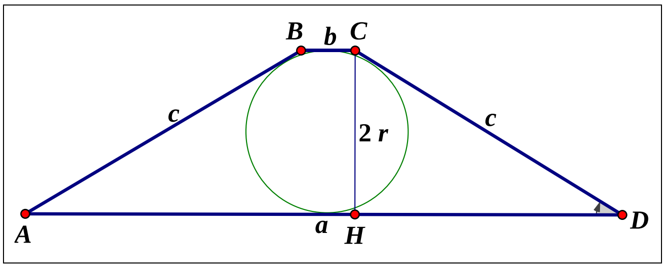
Ответ: 18

2. Из города A в город B выехал грузовой автомобиль, одновременно из B в A выехал легковой автомобиль. Грузовой автомобиль проходил в час 5% расстояния между городами и встретился с легковым автомобилем через 3 часа 20 минут после начала движения. Сколько часов затратил на путь из B в A легковой автомобиль?

Обозначим расстояние между городами S. Тогда скорость грузового автомобиля $V_1=0,05S$. Обозначим скорость легкового автомобиля V_2, тогда $S=(V_1+V_2)\cdot 3\frac{1}{3}$. Подставляя в последнее уравнение V_1 и приводя подобные, получим $2,5S=10V_2$. Отсюда, время, затраченное легковым автомобилем на путь из B в A, равно $t=\frac{S}{V_2}=\frac{10}{2,5}=4$.

Ответ: 4 часа

3. Равнобедренная трапеция описана около окружности. Площадь трапеции равна 800, а тупой угол трапеции – 150^0. Найдите радиус окружности.



Если радиус вписанной окружности – r, то высота трапеции – $2r$, а боковая сторона – $4r$ (т.к. в треугольнике HCD $\angle D=30^0$).
Поскольку в трапецию вписана окружность, сумма её оснований $a+b$ равна сумме боковых сторон $8r$.

Площадь трапеции равна $800=\frac{a+b}{2}\cdot 2r=(a+b)\cdot r=8r^2$. Отсюда $r^2=100$, а $r=10$

Ответ: 10

4. Решите неравенство $\left((x+1)^{-1}-(x+6)^{-1}\right)^2\le\frac{\left|x^2-10x\right|}{(x^2+7x+6)^2}$

Преобразуем выражение, стоящее в скобках в левой части неравенства: $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+6}=\frac{5}{(x+1)(x+6)}$.

Тогда неравенство примет вид: $\frac{25}{(x+1)^2(x+6)^2}\le\frac{\left|x^2-10x\right|}{(x+1)^2(x+6)^2}$. Что равносильно системе:

$\begin{cases} x\ne-1; x\ne-6 & (1)\\ \left|x^2-10x\right|\ge 25 & (2)\end{cases}$. Неравенство (2) равносильно совокупности: $\left[\begin{array}{l} x^2-10x\ge 25\\ x^2-10x\le-25\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x\le 5-5\sqrt{2}\\ x\ge 5+5\sqrt{2}\\ x=5\end{array}\right.$

Тогда с учётом условий (1) получим ответ.

Ответ: $(-\infty;-6)\cup(-6;5-5\sqrt{2}]\cup\{5\}\cup[5+5\sqrt{2};\infty)$

5. При каких значениях параметра n уравнение $\frac{1}{2n+nx}-\frac{1}{2x-x^2}=\frac{2(n+3)}{x^3-4x}$ имеет единственный корень?

Разложим на множители знаменатели всех дробей. Получим $\frac{1}{n(x+2)}+\frac{1}{x(x-2)}=\frac{2(n+3)}{x(x-2)(x+2)}$

При $n\neq 0$ ОДЗ уравнения $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2;0;2\}$. Приводим дроби к общему знаменателю, приравниваем числитель к нулю. После приведения подобных членов записываем получившееся квадратное уравнение в каноническом виде: $x^2-(2-n)x-(2n^2+4n)=0$ Находим дискриминант этого уравнения $D=(3n+2)^2$ и его корни $x_1=n+2$ и $x_2=-2n$.

Корень будет единственным, если $D=0$, т.е. $n=-\frac{2}{3}$, а также в случае, когда один из корней не входит в ОДЗ. Например, при $n=-2$ $x_1=0$ не входит в ОДЗ, а $x_2=4$ – единственный корень. Аналогично, в ОДЗ не входит x_1 при $n=-4$, x_2 не входит в ОДЗ при $n=\pm 1$.

Ответ: $n\in\left\{-4;-2;\pm 1;-\frac{2}{3}\right\}$

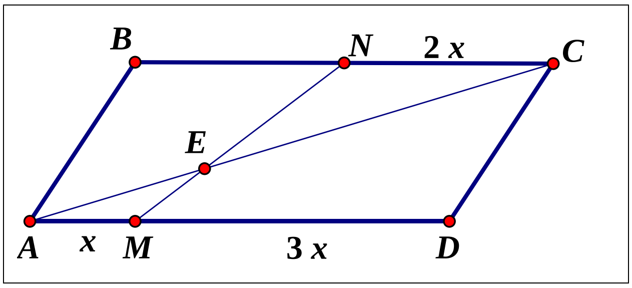
6. В параллелограмме $ABCD$ на большей диагонали AC взята точка E так, что $AE=\frac{1}{3}AC$.

Через точку Е проведена прямая, которая, пересекая *AD*, делит её в отношении 1:3. В каком отношении эта прямая делит площадь параллелограмма?

.

Пусть прямая пересекает *AD* в точке *M* и делит площадь параллелограмма на две части: S_1 и S_2.

По условию, точка *M* делит сторону *AD* в отношении 1:3. Возможны два случая.



I. $AM:MD=1:3$

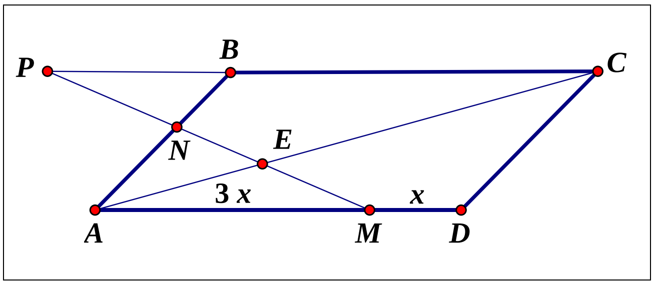
Обозначим *AM* = *x*, тогда *MD* = 3*x*, а *AD* = 4*x*.

Треугольник AME подобен треугольнику CNE.

Поэтому $\frac{NC}{AM}=\frac{EC}{AE}=\frac{2}{1}\Rightarrow NC=2x$.

Поскольку *AD* = *BC*, то $BN=4x-2x=2x$.

У трапеций *ABNM* и *DMNC* высоты одинаковы, поэтому их площади относятся как суммы оснований, т.е. $\frac{S_1}{S_2}=\frac{x+2x}{3x+2x}=\frac{3}{5}$



II. $AM:MD=3:1$

Обозначим *MD* = *x*, тогда *AM* = 3*x*, а *AD* = 4*x*.

Продлим *MN* до пересечения с *BC* в точке *P*.

Треугольник AME подобен треугольнику CPE.

Поэтому $\frac{CP}{AM}=\frac{EC}{AE}=\frac{2}{1}\Rightarrow CP=6x$.

Поскольку *AD* = *BC*, то $BP=6x-4x=2x$.

Треугольник PBN подобен треугольнику MAN. Поэтому $\frac{AN}{BN}=\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}\Rightarrow AN=\frac{3}{5}AB$.

Если высота параллелограмма равна *h*, то его площадь $S=4xh$, а площадь ΔMAN будет равна $S_1=\frac{1}{2}3x\cdot\frac{3}{5}h=\frac{9}{10}xh$. Тогда $S_2=4xh-\frac{9}{10}xh=\frac{31}{10}xh$. Значит, прямая MN делит площадь параллелограмма в отношении $\frac{S_1}{S_2}=\frac{9xh}{31xh}=\frac{9}{31}$.

Ответ: 3:5 или 9:31