

Олимпиада «Будем учиться в России!»

12 сентября 2015 г.

г. Кишинёв

Вариант 1

1. Упростить выражение $(\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{2})$

Можно группировать скобки в любом порядке, но проще сгруппировать первую скобку с третьей, а вторую – с последней. Оба произведения сворачиваются в разность квадратов $((\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - 5)(5 - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2) = 2\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{6} = 24$

Ответ: 24

2. Решите уравнение $3x^2 - 3\sqrt{4x^2 + 20x + 25} + 5x - 9 = 0$

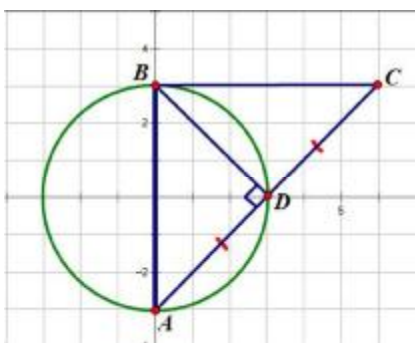
Заметив, что под корнем стоит полный квадрат, вынесем его из-под корня со знаком модуля. Получившееся уравнение $3x^2 - |6x + 15| + 5x - 9 = 0$ решаем на интервалах.

При $x \geq -2,5$ (1), получаем уравнение $3x^2 - x - 24 = 0$. Условию (1) удовлетворяет корень $x = 3$.

При $x < -2,5$ (2), получаем уравнение $3x^2 + 11x + 6 = 0$. Условию (2) удовлетворяет корень $x = -3$

Ответ: $\{-3; 3\}$

3. AB – диаметр окружности; BC – касательная. Секущая AC делится окружностью (в точке D) пополам. Найти угол DAB .



Соединим точки B и D . Угол BDA – прямой, т.к. опирается на диаметр. Таким образом, BD – одновременно является высотой и медианой, следовательно, треугольник ABC – равнобедренный.

Угол ABC – прямой, т.к. BC – касательная.

В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC углы при основании равны 45° .

Ответ: 45°

4. При покупке ребенку новых лыж с ботинками родителям пришлось заплатить на 25% больше денег, чем год назад, причем лыжи подорожали с тех пор на 15%, а ботинки — на 40% от первоначальной стоимости. На сколько процентов год назад лыжи были дороже ботинок?

Пусть год назад цена лыж была l , а ботинок – b .

Тогда в этом году пришлось заплатить $(l + b) \cdot 1,25 = 1,15l + 1,4b$.

Приводя подобные члены, получим $\frac{l}{b} = \frac{0,15}{0,1} = 1,5$. Лыжи были дороже ботинок на 50%.

Ответ: 50%

5. При каких значениях параметра k корнями уравнения $x^2 + xk^2 + k(4x - 1) - 5x = 0$ являются два противоположных числа?

Исходное уравнение является квадратным относительно x : $x^2 + (k^2 + 4k - 5)x - k = 0$ и по теореме Виета – если это уравнение имеет корни, то их сумма равна $(k^2 + 4k - 5)$. По условию корнями являются два противоположных числа, а значит $k^2 + 4k - 5 = 0$. Решая последнее уравнение, находим $k = -5$ или $k = 1$. Но при $k = -5$ уравнение $k^2 + 5 = 0$ корней не имеет.

Ответ: $k = 1$

6. В прямоугольнике $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ и $BC = 10$ на стороне AD расположены точки M и N . При этом $DM = 4$, прямые BN и CM пересекаются в точке P , а площадь треугольника MNP равна 1. Найдите расстояние между точками M и N .

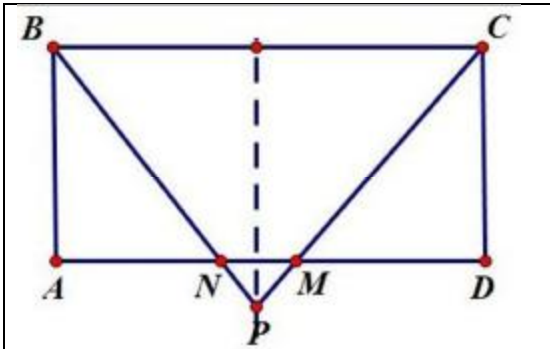


Рисунок 1

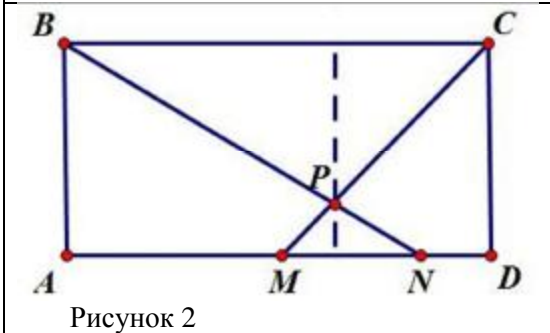


Рисунок 2

Обозначим длину искомого отрезка MN через x , а высоту треугольника MNP – h .

Прямые BN и CM могут пересекаться как внутри прямоугольника $ABCD$ (рис.2), так и вне его (рис.1). В обоих случаях треугольники BSP и MNP подобны, а значит, их основания относятся так же, как высоты, т.е.

$$\frac{x}{10} = \frac{h}{4 \pm h}$$

(здесь знак «+» соответствует 1-му случаю, а знак «-» соответствует 2-му случаю).

Поскольку площадь треугольника MNP равна 1, $xh = 2$.

Решая систему двух уравнений с неизвестными x и h ,

выразим h через x и получим квадратное относительно x уравнение: $2x^2 \pm x - 10 = 0$

В 1-м случае (со знаком «+») положительный корень уравнения равен 2, т.е. $MN = 2$

Во 2-м случае (со знаком «-») положительный корень уравнения равен 2,5, т.е. $MN = 2,5$

Во 2-м случае (со знаком «-») положительный корень уравнения равен 2,5, т.е. $MN = 2,5$

Ответ: 2 или 2,5