

Олимпиада «Будем учиться в России!»

12 сентября 2015 г.

г. Кишинёв

Вариант 2

1. Упростить выражение $\left(\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)\sqrt{2-\sqrt{3}} + \left(\sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)\sqrt{2+\sqrt{3}}$

Приведём к общему знаменателю слагаемые в скобках, получим $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\sqrt{2-\sqrt{3}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Вынесем за скобку общие множители, получим выражение $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{6}}(\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}})$.

Если возвести в квадрат сумму, стоящую в скобках, получим 6. Т.е. сама скобка равна $\sqrt{6}$.

Произведение $\sqrt{2-\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}} = 1$.

Ответ: 1

2. Решите неравенство $\frac{3(x+1)^2 - 16}{3|x+1| - 6} \leq \frac{11}{6}$

Введём замену переменных $t = |x+1|$, тогда исходное неравенство примет вид

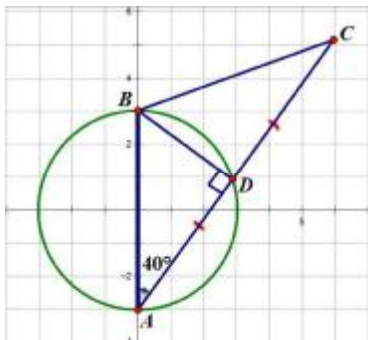
$\frac{3t^2 - 16}{3(t-2)} - \frac{11}{6} \leq 0$ или $\frac{6t^2 - 11t - 10}{t-2} \leq 0$. Решая это неравенство методом интервалов и

учитывая, что $t \geq 0$, получим $2 < t \leq 2,5$. Возвращаемся к переменной x и решаем систему

$$\begin{cases} |x+1| > 2 \\ |x+1| \leq 2,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < -3 \\ -3,5 \leq x \leq 1,5 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-3,5; -3) \cup (1; 1,5]$$

Ответ: $[-3,5; -3) \cup (1; 1,5]$

3. AB – диаметр окружности. Секущая AC делится окружностью (в точке D) пополам и составляет с диаметром AB угол 40° . Найти угол ABC .



Соединим точки B и D . Угол BDA – прямой, т.к. опирается на диаметр. Таким образом, BD – одновременно является высотой и медианой, следовательно, треугольник ABC – равнобедренный.

В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC углы при основании равны 40° , следовательно, угол при вершине равен $\angle ABC = 180^\circ - 40^\circ - 40^\circ = 100^\circ$

Ответ: 100°

4. На заводе рабочий день уменьшился с 8 до 7 часов. На сколько процентов нужно повысить производительность труда, чтобы количество выпускаемой за день продукции увеличилось на 5%?

Обозначим производительность труда v , время t , а количество продукции S . Тогда $S = vt$.

Т.е. $S_1 = 7v_1$, а $S_2 = 8v_2$.

Количество продукции увеличилось на 5%, т.е. $\frac{S_2 - S_1}{S_1} = 0,05 = \frac{1}{20}$.

Тогда $\frac{7v_2}{8v_1} = \frac{S_2}{S_1} = \frac{1}{20} + 1 = \frac{21}{20}$. Таким образом $\frac{v_2}{v_1} = \frac{6}{5}$, а производительность труда повысится на

$$\frac{v_2 - v_1}{v_1} \cdot 100\% = \left(\frac{v_2}{v_1} - 1 \right) \cdot 100\% = \left(\frac{6}{5} - 1 \right) \cdot 100\% = 20\%$$

Ответ: 20%

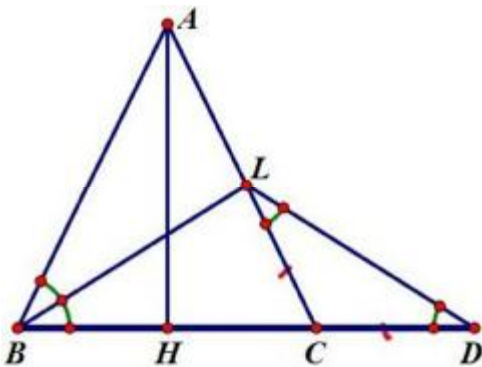
5. При каких значениях a неравенство $a^2 + ax + 2x - 11 \geq 0$ выполняется при всех действительных x таких, что $|x| \leq 2$?

Линейная функция $f(x) = (a+2)x + a^2 - 11 \geq 0$ на отрезке $[-2; 2]$ тогда и только тогда, когда она неотрицательна в концах этого отрезка. Т.е. должны выполняться условия

$$\begin{cases} f(-2) = a^2 - 2a - 15 \geq 0 \\ f(2) = a^2 + 2a - 7 \geq 0 \end{cases}, \text{ что равносильно } \begin{cases} a \in (-\infty; -1 - 2\sqrt{2}) \cup (-1 + 2\sqrt{2}; +\infty) \\ a \in (-\infty; -3] \cup (5; +\infty) \end{cases}$$

Ответ: $a \in (-\infty; -1 - 2\sqrt{2}) \cup (5; +\infty)$

6. В $\triangle ABC$ со сторонами $AB = AC = 25$ и углом при основании равным $\arccos \frac{1}{3}$ проведена биссектриса BL ($L \in AC$). На прямой BC выбрана точка D так, что $BL = LD$. Найдите расстояние между точками D и C .



Обозначим $\angle LBC = \angle LBA = a$

Т.к. $\triangle BLD$ равнобедренный, $\angle LDB = a$

Т.к. $\triangle ABC$ равнобедренный, $\angle ACB = 2a$. Это внешний угол $\triangle LDC$, значит $\angle DLC = 2a - a = a$. В $\triangle LDC$ два угла равны, следовательно, он равнобедренный и $DC = LC$.

Т.к. $\cos \angle ABH = \frac{1}{3}$ можно обозначить $BH = x$, а $BA = 3x$.

AH – высота и медиана, поэтому также и $HC = x$, а $BC = 2x$.

Поскольку BL – биссектриса, то $\frac{LC}{AL} = \frac{BC}{AB} = \frac{2x}{3x}$

Т.к. $AC = 25$, то $LC = 10$, значит и $DC = 10$

Ответ: 10